Úvod
Atomické formuly a štruktúry

1. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2023/2024

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 1. prednášky

Úvod

Úvod

O logike

Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.

Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.

Vyžaduje rozoznať

- správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania
- od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.

Logika skúma, **aké** sú zákonitosti správneho usudzovania
a **prečo** sú zákonitosťami.

Ako logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení

Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia)

odvodzovanie nových logických dôsledkov
z doterajších poznatkov.
Aký má vzťah s jazykom, štruktúrou tvrdení?

Jazyk, poznatky a teórie

Jazyk slúži na formulovanie tvrdení, ktoré vyjadrujú
poznatky o svete (princípy jeho fungovania aj pozorované fakty).

Súboru poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, hovoríme ***teória***.

Príklad 0.1 (Party time!)

Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.
Organizujeme párty a P0: chceme na ňu pozvať niekoho z nich.
Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Jedna z otázok, ktoré si o teórii o party môžeme položiť, je:
„**Môžu** noví známi prísť na párty tak, aby boli **všetky podmienky splnené**? Ak áno, v akých zostavách?“

Priamočiaro (aj keď prácne) to zistíme tak, že:

1. vymenujeme **všetky možné stavy sveta** (účasti nových známych),
2. zistíme, v ktorých sú všetky podmienky splnené.

K	J	S	P0	P1	P2	P3
n	n	n				
n	n	p				
n	p	n				
n	p	p				
p	n	n				
p	n	p				
p	p	n				
p	p	p				

P0: Niekto z Kim, Jima, Sarah príde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Jedna z otázok, ktoré si o teórii o party môžeme položiť, je:
„**Môžu** noví známi prísť na párty tak, aby boli **všetky podmienky splnené**? Ak áno, v akých zostavách?“

Priamočiaro (aj keď prácne) to zistíme tak, že:

1. vymenujeme **všetky možné stavy sveta** (účasti nových známych),
2. zistíme, v ktorých sú všetky podmienky splnené.

K	J	S	P0	P1	P2	P3
n	n	n	n			
n	n	p	p	p	p	n
n	p	n	p	p	n	
n	p	p	p	p	n	
p	n	n	p	p	p	p
p	n	p				
p	p	n				
p	p	p				

P0: Niekto z Kim, Jima, Sarah príde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Jedna z otázok, ktoré si o teórii o party môžeme položiť, je:
„**Môžu** noví známi prísť na párty tak, aby boli **všetky podmienky splnené**? Ak áno, v akých zostavách?“

Priamočiaro (aj keď prácne) to zistíme tak, že:

1. vymenujeme **všetky možné stavy sveta** (účasti nových známych),
2. zistíme, v ktorých sú všetky podmienky splnené.

K	J	S	P0	P1	P2	P3
n	n	n	n			
n	n	p	p	p	p	n
n	p	n	p	p	n	
n	p	p	p	p	n	
p	n	n	p	p	p	p
p	n	p	p	n		
p	p	n	p	p	p	p
p	p	p	p	n		

P0: Niekto z Kim, Jima, Sarah príde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Teória rozdeľuje **možné stavy sveta** (interpretácie) na:

- $\models$ stavy, v ktorých je pravdivá — ***modely*** teórie,
- $\not\models$ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

Príklad 0.2

Modelmi teórie P0, P1, P2, P3 sú dve situácie:
keď Kim príde na párty a ostatní noví známi nie,
a keď Kim a Jim prídu na párty a Sarah nie.

K	J	S	P0	P1	P2	P3	
n	n	n	n				$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	n	p	p	p	p	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	n	p	p	n		$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	p	p	p	n		$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	n	p	p	p	p	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	p	p	n			$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	n	p	p	p	p	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	p	p	n			$\not\models$ P0, P1, P2, P3

Logické dôsledky

Často je zaujímavá iná otázka o teórii —
musí byť nejaké tvrdenie pravdivé **vždy, keď** je pravdivá teória?

V našom príklade:
Kto **musí** a kto **nesmie** prísť na párty,
aby boli podmienky P0, …, P3 splnené?

K	J	S	P0	P1	P2	P3	
n	n	n	n				$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	n	p	p	p	p	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	n	p	p	n		$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	p	p	p	n		$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	n	p	p	p	p	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	p	p	n			$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	n	p	p	p	p	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	p	p	n			$\not\models$ P0, P1, P2, P3

Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia,
ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

Príklad 0.3

Logickými dôsledkami teórie P0, P1, P2, P3 sú napríklad:

- Kim príde na párty.
- Sarah nepríde na párty.

Logických dôsledkov je nekonečne veľa, môžu nimi byť ľubovoľne zložité tvrdenia:

- Na party príde Kim alebo Jim.
- Ak príde Sarah, tak príde aj Jim.
- Ak príde Jim, tak nepríde Sarah.

$\vdots$

Logické usudzovanie

Preskúmať všetky stavy sveta je často nepraktické až nemožné.

Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať* **usudzovaním** (*inferovať*).

Pri odvodení vychádzame z ***premís*** (predpokladov)
a postupnosťou **správnych úsudkov** dospievame k ***záverom***.

Príklad 0.4

Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1),
a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
2. Podľa 1. a P2 pôjde aj Kim.
3. Podľa 2. a P1 nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy:
Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

P0: Niekto z Kim, Jima, Sarah príde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Dedukcia

Úsudok je správny (*korektný*) vtedy, keď **vždy**, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne,
záver **je logickým dôsledkom** premís
a odvodenie je jeho *dôkazom* z premís.

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky,
ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne,
ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;
- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;
- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

Kontrapríklady

Ak úsudok nie je správny, existuje ***kontrapríklad*** —
stav sveta, v ktorom sú **predpoklady pravdivé**, ale **záver je nepravdivý**.

Príklad 0.5

Nesprávny úsudok:

Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad:

Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.

Teória je pravdivá, výrok „na party príde Jim“ nie je pravdivý.

K	J	S	
n	n	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	n	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	n	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	n	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3

Matematická logika

- modeluje jazyk, jeho sémantiku a usudzovanie ako matematické objekty (množiny, postuposti, zobrazenia, stromy);
- rieši logické problémy matematickými metódami.

Rozvinula sa koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia hlavne vďaka Hilbertovmu programu — snahe vybudovať základy matematiky bez sporov a paradoxov, mechanizovať overovanie dôkazov alebo priamo hľadanie matematických viet.

Informatika sa vyvinula z matematickej logiky
(J. von Neumann, A. Turing, A. Church, ...)

Väčšina programovacích jazykov obsahuje logické prvky:

- `all(x > m for x in arr)`,

fragmenty niektorých sú priamo preložiteľné na logické formuly:

- `SELECT t1.x, t2.y FROM t1 INNER JOIN t2 ON t1.z = t2.z WHERE t1.z > 25`,

niektoré (Prolog) sú podmnožinou logických jazykov.

Metódami logiky sa dá presne špecifikovať, čo má program robiť,
popísať, čo robí, a dokázať, že robí to, čo bolo špecifikované.

Matematická logika a informatika

Veľa otázok v logike je algoritmických:

- Možno usudzovanie pre danú triedu jazykov automatizovať?
- Dá sa nájsť dôkaz pre tvrdenia s takouto štruktúrou dostatočne rýchlym algoritmom?

Výpočtová logika hľadá algoritmické riešenia problémov pre rôzne triedy logických jazykov. Aplikovateľné na iné ťažké problémy (grafové, plánovacie, vysvetľovanie, …) vyjadriteľné v príslušnej triede.

Logika umožňuje hľadať všeobecné odpovede.

- Ak možno vlastnosť grafu popísať *prvorádovou formulou s najviac dvomi kvantifikátormi* a zároveň ..., existuje pomerne rýchly algoritmus, ktorý rozhodne, či daný graf túto vlastnosť má.

Automatizované dokazovače: napr. v r. 1996 počítač dokázal Robbins Conjecture, ktorá odolávala ľudskej snahe 60 rokov.

Formálne jazyky a formalizácia

Matematická logika nepracuje s prirodzeným jazykom,
ale s jeho zjednodušenými modelmi — **formálnymi jazykmi**.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax a sémantika.
- Obchádzajú problémy prirodzeného jazyka:

  viacznačnosť slov, nejednoznačné syntaktické vzťahy, zložitá syntaktickú analýzu, výminky, obraty s ustáleným významom, …
- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte:
  aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov,
  programovacie jazyky, …

Problémy z iných oblastí opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv **sformalizovať**, a potom naň môžeme použiť aparát mat. logiky.

Formalizácia vyžaduje cvik — trocha veda, trocha umenie.

Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária.
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov.
Koľko rokov majú Karol a Mária?

$\rightsquigarrow$

$$k = 3 \cdot m$$
$$k + m = 12$$

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

Príklad 0.6

Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária.
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. $\rightsquigarrow$
Koľko rokov majú Karol a Mária?

$$k = 3 \cdot m$$
$$k + m = 12$$

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

Príklad 0.6

Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty. $\mathrm{p(K)} \lor \mathrm{p(J)} \lor \mathrm{p(S)}$

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim. $\mathrm{p(K)} \to \neg\mathrm{p(S)}$

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim. $\mathrm{p(J)} \to \neg\mathrm{p(K)}$

P3: Sarah nepôjde bez Jima. $\neg\mathrm{p(J)} \to \neg\mathrm{p(S)}$

Všimnite si, koľko vetných konštrukcií v slovenčine zodpovedá jednej formálnej spojke $\to$.

Jazyk logiky prvého rádu (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorým sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — G. Frege, G. Peano, C. S. Peirce.

Výrokové spojky + **kvantifikátory** $\forall$ a $\exists$.

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ldots$$

Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe kalkuly — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

korektné — odvodzujú iba logické dôsledky,
úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky.

Kalkuly sú bežné v matematike

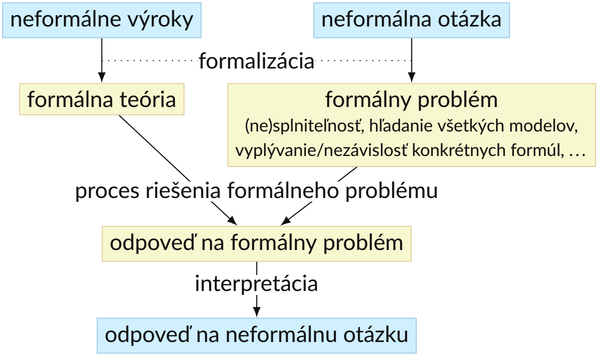
- kalkul elementárnej aritmetiky: na počítanie s číslami, zlomkami,
- kalkul lineárnej algebry: riešenie lineárnych rovníc,
- kalkul matematickej analýzy:
  derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc

⋮

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.

Schéma riešenia problémov pomocou logiky



Úvod

O kurzoch LPI a UdML

Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš **neoddeľuje** *jazyk* výrokov od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku **nedefinuje jasne**.

Prevedieme vás základmi matematickej a výpočtovej logiky pre (postupne čoraz zložitejšie) fragmenty jazykov logiky prvého rádu.

Teoretická časť:

- Matematické definície logických pojmov (výrok, model, logický dôsledok, dôkaz, . . .)
- **Dôkazy** ich vlastností

Praktická časť

- **Dátové štruktúry** na reprezentáciu logických objektov
- **Algoritmické** riešenie logických problémov
- **Formalizácia** rôznych problémov v logických jazykoch a ich **riešenie** nástrojmi na riešenie logických problémov

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

Organizácia — rozvrh, kontakty a pravidlá absolvovania — je popísaná na oficiálnych webových stránkach predmetov:

1-AIN-412 https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Logic_for_CS

1-INF-210 http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~mazak/vyucba/udml/

Atomické formuly a štruktúry

Jazyky logiky prvého rádu

Logika prvého rádu je trieda (rodina) formálnych jazykov.

Zdieľajú:

- časti abecedy — logické symboly (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby formúl (slov)

Líšia sa v mimologických symboloch — časť abecedy, pomocou ktorej sa tvoria najjednoduchšie — atomické formuly (atómy).

Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú pozitívnym jednoduchým vetám o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti jednotlivých pomenovaných objektov.

Príklady 1.1

- Milo beží.
- Jarka vidí Mila.
- Milo beží, ale Jarka ho nevidí.
- Jarka vidí všetkých.
- Jarka dala Milovi Bobyho v piatok.
- Jarka nie je doma.
- Niekto je doma.
- Súčet 2 a 2 je 3.
- Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

Atomické formuly sa skladajú z individuových konštánt a predikátových symbolov.

Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú **pozitívnym jednoduchým vetám** o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti **jednotlivých pomenovaných** objektov.

Príklady 1.1

- ✓ Milo beží.
- ✓ Jarka vidí Mila.
- ✗ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.
- ✗ Jarka vidí všetkých.
- ✓ Jarka dala Milovi Bobyho v piatok.
- ✗ Jarka nie je doma.
- ✗ Niekto je doma.
- ✓ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✓ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

Atomické formuly sa skladajú z **indivíduových konštánt** a **predikátových symbolov**.

Indivíduové konštanty

Indivíduové konštanty sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené objekty.

Zodpovedajú *približne* vlastným menám, jednoznačným pomenovaniam, niekedy zámenám; konštantám v matematike a programovacích jazykoch.

Príklady 1.2

$\mathtt{Jarka}$, 2, $\mathtt{Zuzana\_Čaputová}$, $\mathtt{sobota}$, π, $\ldots$

Indivíduová konštanta:

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt (na rozdiel od vlastného mena *Yeti*);
- nikdy nepomenúva viac objektov (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

Objekt z domény, ktorú chceme prvorádovým jazykom opísať,

- **môže** byť pomenovaný aj **viacerými** indivíduovými konštantami (napr. `Prezidentka_SR` a `Zuzana_Čaputová`);
- **nemusí** mať žiadne meno.

Predikátové symboly a arita

Predikátové symboly sú symboly jazyka logiky prvého rádu,
ktoré označujú vlastnosti alebo vzťahy.

Zodpovedajú

- prísudkom v slovenských vetách,
- množinám alebo reláciám v matematike,
- identifikátorom funkcií s boolovskou návratovou hodnotou.

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — ***aritu***.

Vždy musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím
(podobne ako pozičné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

Dohoda 1.3

Aritu budeme *niekedy* písať ako horný index symbolu.
Napríklad $\texttt{beží}^{1}$, $\texttt{vidí}^{2}$, $\texttt{dal}^{4}$, $<^{2}$.

Zamýšľaný význam predikátových symbolov

Unárny predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje **vlastnosť**, druh, rolu, stav.

Príklady 1.4

$\mathtt{pes}(x)$	x je pes
$\mathtt{čierne}(x)$	x je čierne
$\mathtt{beží}(x)$	x beží

Binárny, *ternárny*, $\ldots$ predikátový symbol (s aritou 2, 3, $\ldots$) zvyčajne označuje **vzťah** svojich argumentov.

Príklady 1.5

$\mathtt{vidí}(x, y)$	x vidí y
$\mathtt{dal}(x, y, z, t)$	x dal(a/o) objektu y objekt z v čase t

Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto *mladý*?

Predikátové symboly predstavujú ***kategorické*** vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá **jednoznačne rozhodnúť**, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne.

Príklad 1.6

Predikát $\mathtt{mladší}^2$ môže označovať vzťah „x je mladší ako y“ presne.

Predikát $\mathtt{mladý}^1$ zodpovedá vlastnosti „x je mladý“ iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú *fuzzy* logiky.
Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

Atomické formuly

Atomické formuly majú tvar

$$\mathit{predik\acute{a}t}(\mathit{argument}_1, \mathit{argument}_2, \ldots, \mathit{argument}_k),$$

alebo

$$\mathit{argument}_1 \doteq \mathit{argument}_2,$$

pričom k je arita *predikát*u,
a $\mathit{argument}_1, \ldots, \mathit{argument}_k$ sú (nateraz) indivíduové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) výroku v slovenčine,
t.j. tvrdeniu, ktorého pravdivostná hodnota (pravda alebo nepravda)
sa dá jednoznačne určiť,
lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah

a indivíduové konštanty jednoznačne označujú objekty.

Formalizácia jednoduchých výrokov

Formalizácia je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

Nie je to jednoznačný proces.

V spojení s **návrhom vlastného jazyka** (konštánt a predikátov) je typicky **iteratívna**.

- Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.
- Zanedbávame nepodstatné detaily.
- Doterajší jazyk sa snažíme využiť čo najlepšie.

Príklad 1.7

A_1: Jarka dala Milovi Bobyho.

Návrh jazyka popri formalizácii

Príklad 1.7

A_1: Jarka dala Milovi Bobyho.

A_2: Evka dostala Bobyho od Mila.

Príklad 1.7

A_1: Jarka dala Milovi Bobyho.

A_2: Evka dostala Bobyho od Mila.

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

Príklad 1.7

A_1: Jarka dala Milovi Bobyho.

A_2: Evka dostala Bobyho od Mila.

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

A_4: Boby je pes.

Príklad 1.7

A_1: Jarka dala Milovi Bobyho.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\mathtt{d}(\mathtt{Jarka})}$ $\cancel{\mathtt{dalBobyho}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Milo})}$ $\mathtt{dal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Milo}, \mathtt{Boby})$

A_2: Evka dostala Bobyho od Mila.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\mathtt{dalBobyho}(\mathtt{Milo}, \mathtt{Evka})}$ $\mathtt{dal}(\mathtt{Milo}, \mathtt{Evka}, \mathtt{Boby})$

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\mathtt{dalCilku}(\mathtt{Evka}, \mathtt{Jarka})}$ $\mathtt{dal}(\mathtt{Evka}, \mathtt{Jarka}, \mathtt{Cilka})$

A_4: Boby je pes.

$\rightsquigarrow$ $\mathtt{pes}(\mathtt{Boby})$

Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie ($\mathtt{dal}^3$ pred $\mathtt{dalBobyho}^2$ a $\mathtt{dalCilku}^2$).

Dosiahneme

- expresívnejší jazyk (vyjadrí viac menším počtom prostriedkov),
- zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

Podobné normalizácii databázových schém.

Atomické formuly a štruktúry

Syntax atomických formúl

Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spoľahlivé a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú **presnú** dohodu na tom, o čom hovoríme — **definíciu** logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, ...).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadefinovať napríklad

- **matematicky** ako množiny, n-tice, relácie, funkcie, postupnosti, ...;
- **informaticky** tým, že ich **naprogramujeme**, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací — abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom,
aká je syntax atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

Definícia 1.8

Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:

Mimologickými symbolmi sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Jediným *logickým symbolom* je $\doteq$ (symbol rovnosti).

Pomocnými symbolmi sú **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné.
Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.
Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky/Formálnych jazykoch a automatoch by ste povedali, že *abecedou* jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu je $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, \mathbf{(}, \mathbf{)}, \mathbf{,}\}$.

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať rôzne druhy symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka* $\mathcal{L}$ hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka* $\mathcal{L}$ alebo len *symboly jazyka* $\mathcal{L}$.

Na zápise množiny $\Sigma_{\mathcal{L}}$ však ľahko vidíme,
čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu
od seba líšia a čo majú spoločné.

Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

Príklad 1.9

Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku $\mathcal{L}_{\text{dz}}$, v ktorom

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\mathtt{Boby}, \mathtt{Cilka}, \mathtt{Evka}, \mathtt{Jarka}, \mathtt{Milo}\},$$
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\mathtt{dal}, \mathtt{pes}\}, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\mathtt{dal}) = 3, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\mathtt{pes}) = 1.$$

Príklad 1.10

Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku $\mathcal{L}_{\text{party}}$, kde

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{party}}} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\},$$
$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{party}}} = \{\mathtt{príde}\}, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{party}}}(\mathtt{príde}) = 1.$$

Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o **ľubovoľnom** jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme ***meta premenné***:
premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť **o** (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 1.11

Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

Definícia 1.12

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \ldots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n a $c_1, \ldots, c_n$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na UTI/FoJa by ste povedali, že jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu nad abecedou $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \mathtt{,}\}$
je množina slov

$$\begin{aligned}
&\{\, c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, c_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \,\} \\
&\qquad \cup \{\, P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \operatorname{ar}_{\mathcal{L}}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \,\}.
\end{aligned}$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*.

Príklady atómov jazyka

Príklad 1.13

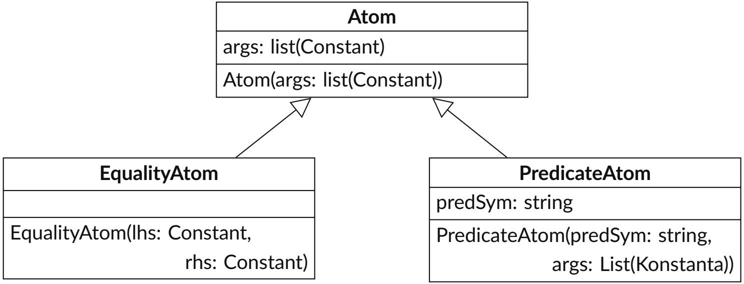
V jazyku $\mathcal{L}_{\text{dz}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\texttt{Boby}, \texttt{Cilka}, \texttt{Evka}, \texttt{Jarka}, \texttt{Milo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\texttt{dal}, \texttt{pes}\}$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\texttt{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\texttt{pes}) = 1$,
sú *okrem iných* rovnostné atómy:

$$\texttt{Boby} \doteq \texttt{Boby} \qquad \texttt{Cilka} \doteq \texttt{Boby}$$
$$\texttt{Evka} \doteq \texttt{Jarka} \qquad \texttt{Boby} \doteq \texttt{Cilka}$$

a predikátové atómy:

$$\texttt{pes}(\texttt{Cilka}) \quad \texttt{dal}(\texttt{Cilka}, \texttt{Milo}, \texttt{Boby}) \quad \texttt{dal}(\texttt{Jarka}, \texttt{Evka}, \texttt{Milo}).$$

Atómy ako triedy



Atomické formuly a štruktúry

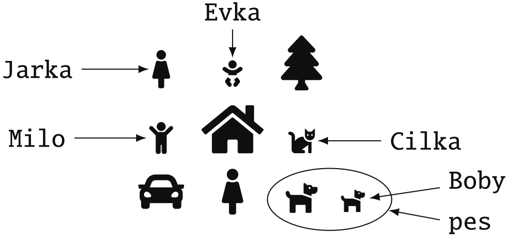
Štruktúry

Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula $\mathtt{pes}(\mathtt{Boby})$ pravdivá v nejakej situácii (napríklad u babky Evky, Jarky a Mila na dedine)?

Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt b pomenúva konštanta $\mathtt{Boby}$;
2. akú vlastnosť p označuje predikát $\mathtt{pes}$;
3. či objekt b má vlastnosť p.



Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať?

Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie
  (stavu vybranej časti sveta),
- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

Matematický model stavu sveta

Ako môžeme matematicky popísať nejakú situáciu tak, aby sme pomocou tohto popisu mohli vyhodnocovať atomické formuly v nejakom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$?

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- množina všetkých týchto objektov — **doména**;

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých týchto objektov — **doména**;
- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
  - množina všetkých týchto objektov — **doména**;
- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$
  - **interpretačná funkcia**;

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
  - množina všetkých týchto objektov — doména;
- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$
  - interpretačná funkcia;
- pre každú indivíduovú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý objekt z domény konštanta c pomenúva,

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
  - ▶ množina všetkých týchto objektov — **doména**;
- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$
  - ▶ **interpretačná funkcia**;
- pre každú indivíduovú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý **objekt** z domény konštanta c pomenúva,
- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$, ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých týchto objektov — **doména**;
- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$
- ▶ **interpretačná funkcia**;
- pre každú indivíduovú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý **objekt** z domény konštanta c pomenúva,
- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$, ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,
- ▶ tvoria **podmnožinu** domény;

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
  - ▶ množina všetkých týchto objektov — **doména**;
- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$
  - ▶ **interpretačná funkcia**;
- pre každú indivíduovú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý **objekt** z domény konštanta c pomenúva,
- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$, ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,
  - ▶ tvoria **podmnožinu** domény;
- pre každý n-árny predikát R z jazyka $\mathcal{L}$, $n > 1$, ktoré n-tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred. R,

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých týchto objektov — **doména**;
- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$
- ▶ **interpretačná funkcia**;
- pre každú indivíduovú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý **objekt** z domény konštanta c pomenúva,
- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$, ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,
- ▶ tvoria **podmnožinu** domény;
- pre každý n-árny predikát R z jazyka $\mathcal{L}$, $n > 1$, ktoré n-tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred. R,
- ▶ tvoria **n-árnu reláciu** na doméne.

Definícia 1.14

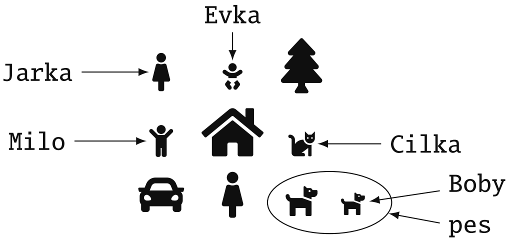
Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ (niekedy *interpretáciou* jazyka $\mathcal{L}$)
nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde
D je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná ***doména*** štruktúry $\mathcal{M}$;
i je zobrazenie, nazývané ***interpretačná funkcia*** štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každej indivíduovej konštante c jazyka $\mathcal{L}$
  priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n
  priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

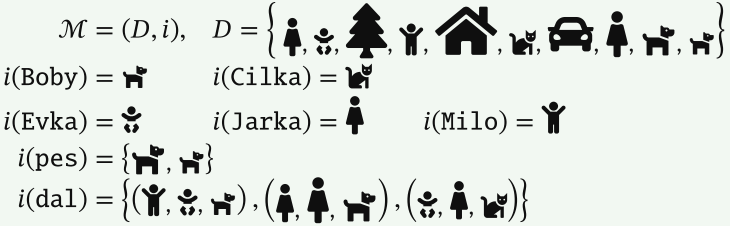
Dohoda 1.15

Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$.

Príklad štruktúry



Príklad 1.16



Štruktúra ako informatický objekt

Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

Aký informatický objekt sa podobá na štruktúru?

Štruktúra ako informatický objekt

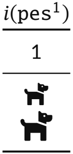
Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

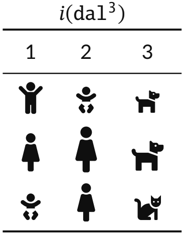
Aký informatický objekt sa podobá na štruktúru?

Databáza:

Predikátové symboly jazyka $\sim$ veľmi zjednodušená schéma DB
(arita $\sim$ počet stĺpcov)

Interpretácia predikátových symbolov $\sim$ konkrétne tabuľky s dátami





Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je nekonečne veľa.

Doména štruktúry

- nesúvisí so zamýšľaným významom interpretovaného jazyka;
- môže mať ľubovoľné prvky;
- môže byť nekonečná.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konštante je priradený objekt domény;
- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante;
- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť nekonečné.

Príklad 1.17 (Štruktúra s nekonečnou doménou)

$\mathcal{M} = (\mathbb{N}, i) \quad i(\mathtt{pes}) = \{\, 2n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \quad i(\mathtt{dal}) = \{\, (n, m, n+m) \mid n, m \in \mathbb{N} \,\}$

$i(\mathtt{Boby}) = 0 \quad i(\mathtt{Cilka}) = 1 \quad i(\mathtt{Evka}) = 3 \quad i(\mathtt{Jarka}) = 5 \quad i(\mathtt{Milo}) = 0$

Atomické formuly a štruktúry

Sémantika atomických formúl

Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

Definícia 1.18

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl jazyka logiky prvého rádu.

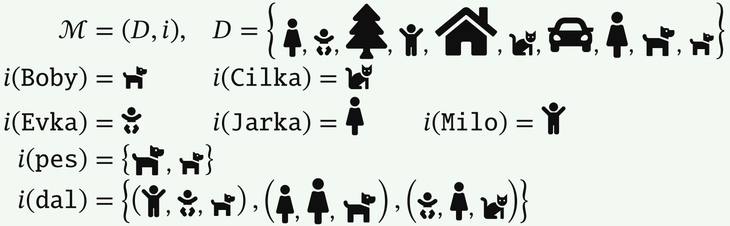
Rovnostný atóm $c_1 \doteq c_2$ jazyka $\mathcal{L}$ je ***pravdivý v štruktúre*** $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $i(c_1) = i(c_2)$.

Predikátový atóm $P(c_1, \ldots, c_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ je ***pravdivý v štruktúre*** $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $(i(c_1), \ldots, i(c_n)) \in i(P)$.

Vzťah *atóm A je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* skrátene zapisujeme $\mathcal{M} \models A$. Hovoríme aj, že $\mathcal{M}$ je ***modelom*** A.

Vzťah *atóm A nie je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* zapisujeme $\mathcal{M} \not\models A$. Hovoríme aj, že A ***je nepravdivý*** v $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$ ***nie je modelom*** A.

Príklad 1.19 (Určenie pravdivosti atómov v štruktúre)



Atóm $\texttt{pes}(\texttt{Boby})$

Atóm $\texttt{dal}(\texttt{Evka}, \texttt{Jarka}, \texttt{Cilka})$

Atóm $\texttt{Cilka} \doteq \texttt{Boby}$

$\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt
$i(c_1) = i(c_2)$

$\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt
$(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$

Príklad 1.19 (Určenie pravdivosti atómov v štruktúre)

$\mathcal{M} = (D, i)$, $D =$ 

$i(\texttt{Boby}) =$  $i(\texttt{Cilka}) =$ 

$i(\texttt{Evka}) =$  $i(\texttt{Jarka}) =$  $i(\texttt{Milo}) =$ 

$i(\texttt{pes}) =$ 

$i(\texttt{dal}) =$ 

Atóm $\texttt{pes}(\texttt{Boby})$ je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models \texttt{pes}(\texttt{Boby})$,
lebo objekt $i(\texttt{Boby}) =$  je prvkom množiny  $= i(\texttt{pes})$.

Atóm $\texttt{dal}(\texttt{Evka}, \texttt{Jarka}, \texttt{Cilka})$ je pravdivý v $\mathcal{M}$,
t.j., $\mathcal{M} \models \texttt{dal}(\texttt{Evka}, \texttt{Jarka}, \texttt{Cilka})$,
lebo $(i(\texttt{Evka}), i(\texttt{Jarka}), i(\texttt{Cilka})) =$  $\in i(\texttt{dal})$.

Atóm $\texttt{Cilka} \doteq \texttt{Boby}$ nie je pravdivý v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \not\models \texttt{Cilka} \doteq \texttt{Boby}$,
lebo $i(\texttt{Cilka}) =$  $\neq$  $= i(\texttt{Boby})$.

$\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt
$i(c_1) = i(c_2)$

$\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt
$(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$

Atomické formuly a štruktúry

Zhrnutie

Zhrnutie

- Logika prvého rádu je rodina formálnych jazykov.
- Každý jazyk logiky prvého rádu je daný neprázdnou množinou indivíduových konštánt a množinou predikátových symbolov.
- Atomické formuly sú základnými výrazmi prvorádového jazyka.
  - Postupnosti symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$ (predikátové) a $c_1 \doteq c_2$ (rovnostné).
  - Zodpovedajú pozitívnym jednoduchým výrokom o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch, rovnosti jednotlivých pomenovaných objektov.
- Význam jazyku dáva štruktúra — matematický opis stavu sveta
  - Skladá sa z neprázdnej domény a z interpretačnej funkcie.
  - Konštanty interpretuje ako prvky domény.
  - Predikáty interpretuje ako podmnožiny domény/relácie na doméne.
- Pravdivosť atómu určíme interpretovaním argumentov a zistením, či je výsledná n-tica objektov prvkom interpretácie predikátu, resp. pri rovnostnom atóme, či sa objekty rovnajú.