Výrokovologické spojky a ohodnotenia

2. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2023/2024

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 2. prednášky

- Výrokovologické spojky a ohodnotenia
  - Boolovské spojky
  - Implikácia
  - Ekvivalencia
  - Správnosť a vernosť formalizácie
  - Syntax výrokovologických formúl
  - Sémantika výrokovologických formúl
  - Teórie a ich modely
  - Výrokovologické ohodnotenia

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme si povedali:

- čo sú symboly jazyka *atomických formúl* logiky prvého rádu;
- čo sú atomické formuly;
- čo sú štruktúry:
  - modely stavu sveta,
  - neprázdna doména + interpretačná funkcia,
  - konštanty označujú objekty,
  - predikáty označujú vzťahy a vlastnosti;
- kedy sú atomické formuly pravdivé v danej štruktúre.
- Jazyk atomických formúl je oproti slovenčine veľmi slabý.
- Môžu byť pravdivé vo veľmi čudných štruktúrach.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Výrokovologické spojky

Atomické formuly logiky prvého rádu môžeme spájať do zložitejších tvrdení **výrokovologickými spojkami**.

- Zodpovedajú spojkám v slovenčine, ktorými vytvárame súvetia.
- Významom spojky je vždy **boolovská funkcia**,
  teda funkcia na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov.
  Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí
  iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.1

Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, …

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad

Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

Dôkaz.

Uvažujme o výroku „*Karol je doma, pretože Jarka je v škole*“.

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad

Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

Dôkaz.

Uvažujme o výroku „*Karol je doma, pretože Jarka je v škole*“.

Je pravdivý v situácii: Je 18:00 a Karol je doma, aby šiel na prechádzku s ich psom. Ten by inak musel čakať na Jarku, ktorá sa zo školy vráti až o 19:30.

Nie je pravdivý v situácii: Jarka išla ráno do školy, ale Karol ostal doma, lebo je chorý. S Jarkinou prítomnosťou v škole to nesúvisí.

V oboch situáciách sú výroky „*Karol je doma*“ aj „*Jarka je v škole*“ pravdivé, ale pravdivostná hodnota zloženého výroku je rôzna.
Nezávisí iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov
(ale od existencie vzťahu príčina-následok medzi nimi).

Spojka *pretože* teda nie je funkciou na pravdivostných hodnotách. □

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Boolovské spojky

Negácia

Negácia ¬ je **unárna** spojka — má jeden argument, formulu.

Zodpovedá výrazom *nie*, „*nie je pravda, že …* “, predpone *ne*-.

Ľubovoľne vnárateľná.

Formula *vytvorená* negáciou sa **nezátvorkuje**.

Okolo argumentu negácie **nepridávame** zátvorky,
ale môže ich mať on sám, ak to jeho štruktúra vyžaduje.

Príklad 2.2

$\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol})$	Karol **nie** je doma.
$\neg\mathtt{Jarka} \doteq \mathtt{Karol}$	Jarka **nie** je Karol.
$\neg\neg\neg\mathtt{poslúcha}(\mathtt{Cilka})$	**Nie** je pravda, že **nie** je pravda, že Cilka **ne**poslúcha.
$\cancel{(\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))}$	nesprávna
$\cancel{\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))}$	syntax

Negácia rovnostného atómu

Rovnosť nie je spojka, preto:

- ✓ $\neg\,\mathtt{Jarka} \doteq \mathtt{Karol}$ — Jarka **nie** je Karol.
- ✗ $\neg(\mathtt{Jarka} \doteq \mathtt{Karol})$

Zátvorky sú zbytočné, lebo čítanie
„«Nie je pravda, že Jarka» sa rovná Karol“ je nezmyselné:

1. Syntakticky: Negácia sa vzťahuje na formulu.
   Konštanta nie je formula, rovnosť s oboma argumentmi je.
2. Sémanticky: Negácia je funkcia na pravdivostných hodnotách.
   Konštanty označujú objekty domény.
   Objekty nie sú pravdivé ani nepravdivé.

Dohoda 2.3

Formulu $\neg\,\tau \doteq \sigma$ budeme skrátene zapisovať $\tau \not\doteq \sigma$.

Konjunkcia

Konjunkcia $\wedge$ je binárna spojka.

Zodpovedá spojkám *a*, *aj*, *i*, *tiež*, *ale*, *avšak*, *no*, *hoci*, *ani*, *ba (aj/ani)*, …

Formalizujeme ňou zlučovacie, stupňovacie a odporovacie súvetia:

- Jarka je doma aj Karol je doma.
  $(\texttt{doma}(\texttt{Jarka}) \wedge \texttt{doma}(\texttt{Karol}))$
- Jarka je v škole, no Karol je doma.
  $(\texttt{v\_škole}(\texttt{Jarka}) \wedge \texttt{doma}(\texttt{Karol}))$
- Ani Jarka nie je doma, ani Karol tam nie je.
  $(\neg\texttt{doma}(\texttt{Jarka}) \wedge \neg\texttt{doma}(\texttt{Karol}))$
- Nielen Jarka je chorá, ale aj Karol je chorý.
  $(\texttt{chorý}(\texttt{Jarka}) \wedge \texttt{chorý}(\texttt{Karol}))$

Zloženú formulu vždy zátvorkujeme.

Formalizácia viacnásobných vetných členov konjunkciou

Zlučovacie viacnásobné vetné členy tiež formalizujeme ako konjunkcie:

- Jarka aj Karol sú doma.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Karol sa potkol a spadol.
  $(\mathtt{potkol\_sa}(\mathtt{Karol}) \land \mathtt{spadol}(\mathtt{Karol}))$
- Jarka dostala Bobyho od mamy a otca.
  $(\mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}, \mathtt{mama}) \land \mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}, \mathtt{otec}))$

Podobne (jednoduché a viacnásobné zlučovacie) prívlastky vlastností:

- Eismann je ruský špión.
  $(\mathtt{Rus}(\mathtt{Eismann}) \land \mathtt{špión}(\mathtt{Eismann}))$
- Boby je malý čierny psík.
  $((\mathtt{malý}(\mathtt{Boby}) \land \mathtt{čierny}(\mathtt{Boby})) \land \mathtt{pes}(\mathtt{Boby}))$

Stratené v preklade

Zlučovacie súvetia niekedy vyjadrujú časovú následnosť,
ktorá sa pri priamočiarom preklade do logiky prvého rádu stráca:

- Jarka a Karol sa stretli a išli do kina.
  $$\big(\mathtt{stretli\_sa}(\mathtt{Jarka},\mathtt{Karol}) \land \big(\mathtt{do\_kina}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{do\_kina}(\mathtt{Karol})\big)\big)$$
- Jarka a Karol išli do kina a stretli sa.
  $$\big(\big(\mathtt{do\_kina}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{do\_kina}(\mathtt{Karol})\big) \land \mathtt{stretli\_sa}(\mathtt{Jarka},\mathtt{Karol})\big)$$

Disjunkcia

Disjunkcia $\vee$ je binárna spojka, ktorá zodpovedá spojkám *alebo*, *či* v **inkluzívnom** význame (môžu nastať aj obe možnosti). Inkluzívnu disjunkciu vyjadruje tiež *„alebo aj/i"* a častice *respektíve*, *eventuálne*, *poprípade*, *prípadne*.

Disjunkciou formalizujeme vylučovacie súvetia s inkluzívnym významom:

- Jarka je doma **alebo** Karol je doma.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \vee \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Bobyho kúpe Jarka, prípadne ho kúpe Karol.
  $(\mathtt{kúpe}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}) \vee \mathtt{kúpe}(\mathtt{Karol}, \mathtt{Boby}))$

Zloženú formulu vždy **zátvorkujeme**.

Formalizácia viacnásobných vetných členov disjunkciou

Viacnásobné vetné členy s vylučovacou spojkou (v inkluzívnom význame) tiež prekladáme ako disjunkcie:

- Doma je Jarka alebo Karol.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Jarka je doma alebo v škole.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{v\_škole}(\mathtt{Jarka}))$
- Jarka dostala Bobyho od mamy alebo otca.
  $(\mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}, \mathtt{mama}) \lor \mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Boby}, \mathtt{otec}))$
- Boby je čierny či tmavohnedý psík.
  $\big((\mathtt{čierny}(\mathtt{Boby}) \lor \mathtt{tmavohnedý}(\mathtt{Boby})) \land \mathtt{pes}(\mathtt{Boby})\big)$

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie „*buď* …, *alebo* … “, „*buď* …, *buď* … “, „*alebo* …, *alebo* … “ **spravidla** (v matematike vždy) vyjadrujú **exkluzívnu** disjunkciu.

- Buď je batéria vybitá alebo svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie *„buď …, alebo …“*, *„buď …, buď …“*, *„alebo …, alebo …“* spravidla (v matematike vždy) vyjadrujú exkluzívnu disjunkciu.

- Buď je batéria vybitá alebo svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

$$\big((\mathtt{vybit\acute{a}}(\mathtt{bat\acute{e}ria}) \lor \mathtt{svieti}(\mathtt{kontrolka})) \land \\ \neg(\mathtt{vybit\acute{a}}(\mathtt{bat\acute{e}ria}) \land \mathtt{svieti}(\mathtt{kontrolka}))\big).$$

Niekedy aj samotné *alebo* spája možnosti,
o ktorých vieme, že sú vzájomne výlučné
(na základe znalostí o fungovaní domény alebo z kontextu):

- Jarka sa nachádza doma alebo v škole.
  (Nemôže byť súčasne na dvoch miestach.)

Viď *Znalosti na pozadí* ďalej.

Jednoznačnosť rozkladu

Formuly s binárnymi spojkami sú vždy uzátvorkované.
Dajú sa jednoznačne rozložiť na podformuly a interpretovať.

Slovenské tvrdenia so spojkami nie sú vždy jednoznačné:

- Karol je doma a Jarka je doma alebo je Boby šťastný.
  - ? $\big((\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)$
  - ? $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land (\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby}))\big)$
- Karol je doma alebo Jarka je doma a Boby je šťastný.
  - ? $\big((\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)$
  - ? $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor (\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby}))\big)$

Jednoznačnosť rozkladu v slovenčine

Slovenčina má prostriedky podobné zátvorkám:

- Viacnásobný vetný člen (+*obaja*, *niekto z*):
  - Karol aj Jarka sú (obaja) doma alebo je Boby šťastný.
    $\big(\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})\big) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)$
  - Doma je Karol alebo Jarka a Boby je šťastný.
    Niekto z dvojice Karol a Jarka je doma a Boby je šťastný.
    $\big(\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})\big) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)$
- Kombinácie spojok *buď* …, *alebo* …; *alebo* …, *alebo* …; *aj* …, *aj* …; *ani* …, *ani* …; a pod.
  - Karol je doma a buď je doma Jarka, alebo je Boby šťastný, alebo jedno aj druhé.
    Aj Karol je doma, aj Jarka je doma alebo je Boby šťastný.
    $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land \big(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)\big)$
  - Alebo je doma Karol, alebo je doma Jarka a Boby je šťastný, alebo aj aj.
    $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor \big(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Boby})\big)\big)$

Oblasť platnosti negácie

Výskyt negácie sa vzťahuje na najkratšiu nasledujúcu formulu — oblasť platnosti tohto výskytu.

- $((\neg \texttt{doma}(\texttt{Karol}) \land \texttt{doma}(\texttt{Jarka})) \lor \texttt{šťastný}(\texttt{Boby}))$
- $(\neg (\texttt{doma}(\texttt{Karol}) \land \texttt{doma}(\texttt{Jarka})) \lor \texttt{šťastný}(\texttt{Boby}))$

Argument negácie je uzátvorkovaný práve vtedy, keď je priamo vytvorený binárnou spojkou:

- ✓ $\neg \neg (\texttt{doma}(\texttt{Karol}) \land \texttt{doma}(\texttt{Jarka}))$
- ✗ $\neg (\neg (\texttt{doma}(\texttt{Karol}) \land \texttt{doma}(\texttt{Jarka})))$

Interakcia negácie s alebo v slovenčine

Zamyslite sa 2.1

Ako by ste sformalizovali: „Doma nie je Jarka alebo Karol“?

A. $(\neg \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \neg \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

B. $\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

Zamyslite sa 2.1

Ako by ste sformalizovali: „Doma nie je Jarka alebo Karol“?

A. $(\neg \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \neg \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

B. $\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

Zvyčajné chápanie v slovenčine je A.

Formalizácii B zodpovedá
„Nie je pravda, že je doma Jarka alebo Karol.“

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Implikácia

Implikácia

Implikácia → je binárna spojka približne zodpovedajúca podmienkovému podraďovaciemu súvetiu *ak* …, *tak* ….

Vo formule $(A \to B)$ hovoríme podformule A antecedent a podformule B konzekvent.

Formula vytvorená implikáciou je nepravdivá v jedinom prípade: antecedent je pravdivý a konzekvent nepravdivý.

⚠ Tomuto významu nezodpovedajú všetky súvetia *ak* …, *tak* …:

Napr. veta „*Ak* by *Sarah prišla*, *Jim* by *prišiel tiež*" je nepravdivá,
keď ňou chceme povedať, že si myslíme, že išli rovnakým autobusom,
ale v skutočnosti Jim išiel iným a zmeškal ho.

Implikácia plne nevystihuje prípady,
keď *ak* …, *tak* … vyjadruje (neboolovský) vzťah príčina-následok (ako *pretože*).

Keď …, *potom* … má často význam časovej následnosti,
ktorý implikácia tiež nepostihuje.

Nutná a postačujúca podmienka

Implikáciu vyjadrujú aj súvetia:

Jim príde, ak príde Kim. Jim príde, iba ak príde Kim.

Vedľajšie vety (*príde Kim*) sú podmienkami hlavnej vety (*Jim príde*).

Ale je medzi nimi podstatný rozdiel:

Jim príde, $\underbrace{\text{ak príde Kim}}_{\text{postačujúca podmienka}}$. Jim príde, $\underbrace{\text{iba ak príde Kim}}_{\text{nutná podmienka}}$.

Postačujúca podmienka

Jim príde, ak príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, stačí, aby prišla Kim.
- Teda, ak príde Kim, tak príde aj Jim.
- Nepravdivé, keď Kim príde, ale Jim nepríde.
- Zodpovedá teda $(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (B \to A)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, pokiaľ príde Kim.

Nutná podmienka

Jim príde, iba ak príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, je nevyhnutné, aby prišla Kim, ale nemusí to stačiť.
- Teda, ak Jim príde, tak príde aj Kim.
- Nepravdivé, keď Jim príde, ale Kim nepríde.
- Zodpovedá teda $(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, iba ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (A \to B)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, iba pokiaľ s Kim.
- Jim príde iba spolu s Kim.
- Jim nepríde bez Kim.

Nutná a postačujúca podmienka rukolapne

Určite by sa vám páčilo, keby z pravidiel predmetu vyplývalo:

*Z logiky prejdete, **ak** prídete na písomnú aj ústnu skúšku.*

Stačilo by prísť na obe časti skúšky a *nebolo by nutné* urobiť nič iné.

Žiaľ, z našich pravidiel vyplýva:

*Z logiky prejdete, **iba ak** prídete na písomnú aj ústnu skúšku.*

Prísť na obe časti skušky **je nutné**, ale na prejdenie to *nestačí*.

Súvetia formalizované implikáciou

$(A \to B)$ formalizuje (okrem iných) zložené výroky:

- Ak A, tak B.
- Ak A, tak aj B.
- Ak A, B.
- Pokiaľ A, [tak (aj)] B.
- A, iba/len/jedine ak/pokiaľ(/keď) B.
- A nastane iba spolu s B.
- A nenastane bez B.
- B, ak/pokiaľ(/keď) A.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Ekvivalencia

Ekvivalencia

Ekvivalencia $\leftrightarrow$ vyjadruje, že ňou spojené výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zodpovedá slovenským výrazom *ak a iba ak*; *vtedy a len vtedy, keď*; *práve vtedy, keď*; *rovnaký … ako …*; *taký … ako …*.

- Jim príde, ak a iba ak príde Kim.
  $(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \leftrightarrow \texttt{príde}(\texttt{Kim}))$
- Číslo n je párne práve vtedy, keď n^2 je párne.
  $(\texttt{párne}(\texttt{n}) \leftrightarrow \texttt{párne}(\texttt{n}^2))$
- Müller je taký Nemec, ako je Stirlitz Rus.
  $(\texttt{Nemec}(\texttt{Müller}) \leftrightarrow \texttt{Rus}(\texttt{Stirlitz}))$

Ekvivalencia

Ekvivalencia $(A \leftrightarrow B)$ zodpovedá tvrdeniu,
že A je nutnou **aj** postačujúcou podmienkou B.

Budeme ju preto považovať za **skratku** za formulu

$$\big((A \to B) \land (B \to A)\big).$$

Ďalšie spojky a vetné konštrukcie

V slovenčine a iných prirodzených aj umelých jazykoch sa dajú tvoriť aj oveľa komplikovanejšie podmienené tvrdenia:

- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy.
- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole,
  inak má Jarka obavy, *okrem* prípadov, keď je Boby s ním.

Výrokovologické spojky sa dajú vytvoriť aj pre takéto konštrukcie, ale väčšinou sa to nerobí.

Na ich vyjadrenie stačia aj základné spojky. Mohli by sme pre ne vymyslieť označenie a považovať aj ako skratky, podobne ako ekvivalenciu.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Správnosť a vernosť formalizácie

Skúška správnosti formalizácie

Správnou formalizáciou výroku je taká formula,
ktorá je pravdivá **za tých istých okolností** ako formalizovaný výrok.

Formuly dokážeme vyhodnocovať iba v štruktúrach.

Preto **za tých istých okolností** znamená **v tých istých štruktúrach**.

Vernosť formalizácie

Výrok *„Nie je pravda, že Jarka a Karol sú doma“*
sa dá **správne** formalizovať ako

$$\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Karol})),$$

ale rovnako **správna** je aj formalizácia

$$(\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol})),$$

lebo je pravdivá v rovnakých štruktúrach.

Pri formalizácii sa snažíme o správnosť, ale zároveň **uprednostňujeme** formalizácie, ktoré **vernejšie** zachytávajú štruktúru výroku.

Zvyšuje to pravdepodobnosť, že sme neurobili chybu,
a uľahčuje hľadanie chýb.

Prvá formalizácia je vernejšia ako druhá, a preto ju uprednostníme.

Znalosti na pozadí

Na praktických cvičeniach ste sa stretli so **znalosťami na pozadí** (background knowledge): vzájomná výlučnosť vlastností *je Nemec* a *je Rus*, ktorá v úlohe nebola explicitne uvedená.

Uprednostňujeme ich vyjadrovanie **samostatnými formulami**.

Rovnaké dôvody ako pre vernosť.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Niektoré tvrdenia **vyznievajú** silnejšie, ako naozaj sú:

- *„Prílohou sú zemiaky* alebo *šalát“*
  môže niekomu znieť ako exkluzívna disjunkcia.
- *„Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %“*
  znie mnohým ako ekvivalencia.

Skutočnú časť významu tvrdenia
nemôžeme poprieť v dodatku k pôvodnému tvrdeniu bez sporu s ním.

- Keď k tvrdeniu *„Karol a Jarka sú doma“*
  dodáme *„Ale Karol nie je doma,“* dostaneme sa do sporu.
  Takže *„Karol je doma“*
  je skutočne časťou významu pôvodného výroku.

Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Časť významu tvrdenia, ktorú **môžeme poprieť** dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením, sa nazýva ***konverzačná implikatúra*** (H. P. Grice). **Nie je skutočnou časťou významu** pôvodného tvrdenia.

- Prílohou sú zemiaky alebo šalát.
  Ale môžete si (pol na pol alebo za príplatok) dať aj oboje.

  Dodatok popiera exkluzívnosť, ale nie je v spore s tvrdením.
  Takže exkluzívnosť nie je súčasťou významu základného tvrdenia, je to iba konverzačná implikatúra.

- Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %.
  Ale nemusíte mať všetko na 100 %, aby ste prešli.

  Dodatok popiera implikáciu „*Prejdete*, iba ak *všetky úlohy vyriešite na 100 %*,“ ale nie je v spore s pôvodným tvrdením.
  Táto implikácia teda nie je skutočne časťou významu základného tvrdenia, je to len konverzačná implikatúra.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Syntax výrokovologických formúl

Syntax a sémantika formúl s výrokovologickými spojkami

Podobne ako pri atomických formulách, aj pri formulách s výrokovologickými spojkami potrebujeme zadefinovať — presne a záväzne — ich syntax (skladbu) a sémantiku (význam).

Niektoré definície preberieme, iné rozšírime alebo modifikujeme, ďalšie pridáme.

Syntax výrokovologických formúl logiky prvého rádu špecifikuje:

- z čoho sa skladajú,
- čím sú a akú majú štruktúru.

Symboly výrokovologickej časti logiky prvého rádu

Definícia 2.4

Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu sú:

mimologické symboly, ktorými sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_\mathcal{L}$;

logické symboly, ktorými sú

- *výrokovologické spojky* $\neg$, $\land$, $\lor$, $\to$ (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie*);
- a *symbol rovnosti* $\doteq$;

pomocné symboly **(**, **)** a **,** (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ sú disjunktné. Pomocné ani logické symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ ani $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.
Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_\mathcal{L}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Atomické formuly

Definícia atomických formúl je takmer rovnaká ako doteraz:

Definícia 2.5

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n a $c_1, \dots, c_n$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Čo sú výrokovologické formuly?

Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{príde}^1\}$.

Čo sú formuly tohto jazyka?

- Samotné atómy, napr. $\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.
- Negácie atómov, napr. $\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.
- Atómy alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$.
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $\big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) \to (\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))\big)$.

Ako to presne a úplne popíšeme?

Čo sú výrokovologické formuly?

Ako presne a úplne popíšeme, čo je formula?

Induktívnou definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly,
   ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
   - Podobne ako báza pri matematickej indukcii.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
   - Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii.
3. Zabezpečíme, že nič iné nie je formulou.

Formuly jazyka výrokovologickej časti logiky prvého rádu

Definícia 2.6

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.
Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ formúl jazyka $\mathcal{L}$ je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$
a nazývame ju ***negácia*** formuly A.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$
a nazývame ich postupne ***konjunkcia***, ***disjunkcia*** a ***implikácia*** formúl A a B.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame ***formulou*** jazyka $\mathcal{L}$.

Dohoda 2.7

Formuly označujeme meta premennými A, B, C, X, Y, Z, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Dohoda 2.8

Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \to B) \land (B \to A))$.

Technicky $(\cdot \leftrightarrow \cdot) : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je funkcia na formulách definovaná ako $(A \leftrightarrow B) = \big((A \to B) \land (B \to A)\big)$ pre každé dve formuly A a B.

Príklad 2.9

Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že $\big(\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))\big)$ je formula? Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli vytvoriť?

Vytvárajúca postupnosť

Definícia 2.10

Vytvárajúcou postupnosťou nad jazykom $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu je ľubovoľná konečná postupnosť $A_0, \ldots, A_n$ postupností symbolov, ktorej každý člen

- je atóm z $\mathcal{A}_\mathcal{L}$, alebo
- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X.

Veta 2.11 (Princíp indukcie na konštrukciu formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne

1. *každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ má vlastnosť P,*

2.1. *ak formula A má vlastnosť P, tak aj $\neg A$ má vlastnosť P,*

2.2. *ak formuly A a B majú vlastnosť P, tak aj každá z formúl $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Formula a existencia vytvárajúcej postupnosti

Tvrdenie 2.12

Postupnosť symbolov A je výrokovologickou formulou vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre A.

Osnova dôkazu.

($\Rightarrow$) Indukciou na konštrukciu formuly

($\Leftarrow$) Indukciou na dĺžku vytvárajúcej postupnosti $\square$

vtt skracuje „*vtedy a len vtedy, keď*“.

Výrokovologické formuly by sa dali alternatívne zadefinovať ako postupnosti symbolov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktoré existuje vytvárajúca postupnosť nad $\mathcal{L}$.

Výhoda: Dĺžka vytvárajúcej postupnosti je číslo, tvrdenia o všetkých formulách sa potom dajú dokazovať matematickou alebo úplnou indukciou.

(Ne)jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly" takto?

Definícia „formúl"

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ „formúl" jazyka $\mathcal{L}$ je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je „formulou" z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $A \land B$, $A \lor B$ a $A \to B$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.3. ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov (A) je v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame „formulou" jazyka $\mathcal{L}$.

Čo znamená „formula"
$(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \to \texttt{príde}(\texttt{Kim}) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah}))$?

Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 2.13 (o jednoznačnosti rozkladu)

Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ v jazyku $\mathcal{L}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:

- X *je atóm z* $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.
- *Existuje práve jedna formula* $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ *taká, že* $X = \neg A$.
- *Existujú práve jedna dvojica formúl* $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ *a jedna spojka* $b \in \{\land, \lor, \to\}$ *také, že* $X = (A \; b \; B)$.

Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly
podľa definície formúl:

$$\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}),\ \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}),\ \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}),\ \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}),$$
$$\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}),\ (\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})),$$
$$((\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$$

ale

- môže obsahovať „zbytočné" prvky;
- nie je jasné *ktoré* z predchádzajúcich formúl
  sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou" vieme vyjadriť konštrukciu formuly
bez týchto problémov?

Vytvárajúci strom

Konštrukciu si vieme predstaviť ako *strom*:

$$((\neg \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$$

$$(\neg \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \qquad \neg \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$$

$$\neg \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \qquad \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \qquad \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$$

$$\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$$

Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zadefinujeme?

Podobne ako sa definuje napr. binárny vyhľadávací strom.

Vytvárajúci strom formuly

Definícia 2.14

Vytvárajúci strom T pre formulu X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \; b \; B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

Syntaktické vzťahy formúl

Uvažujme formulu:

$$((\neg\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \land \texttt{príde}(\texttt{Kim})) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah}))$$

Ako nazveme formuly, z ktorých vznikla?

$$\texttt{príde}(\texttt{Sarah}), \neg\texttt{príde}(\texttt{Jim}), (\neg\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \land \texttt{príde}(\texttt{Kim})), \ldots$$

Ako nazveme formuly, z ktorých *bezprostredne*/*priamo* vznikla?

$$(\neg\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \land \texttt{príde}(\texttt{Kim})) \quad \texttt{a} \quad \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})$$

Ako tieto pojmy presne zadefinujeme?

Podformuly

Definícia 2.15 (Priama podformula)

Pre všetky formuly A a B:

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A.
- Priamymi podformulami $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú formuly A (*ľavá* priama podformula) a B (*pravá* priama podformula).

Definícia 2.16 (Podformula)

Vzťah ***byť podformulou*** je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca pre všetky formuly X, Y a Z:

- X je podformulou X.
- Ak X je priamou podformulou Y, tak X je podformulou Y.
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z, tak X je podformulou Z.

Formula X je ***vlastnou podformulou*** formuly Y práve vtedy, keď X je podformulou Y a $X \neq Y$.

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
  - Počíta aj pomocné symboly.
  - Nič nemá mieru 0, ani atómy.
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly
  - pridanie negácie,
  - spojenie formúl spojkou.

Túto lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*.

Príklad 2.17

Aký je stupeň formuly $\big((\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})) \land \neg(\texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \to \texttt{príde}(\texttt{Jim}))\big)$?

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Ako stupeň zadefinujeme?

Podobne ako sme zadefinovali formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

Stupeň formuly

Definícia 2.18 (Stupeň formuly)

Pre všetky formuly A a B a všetky $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

- Atomická formula je stupňa 0.
- Ak A je formula stupňa n, tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak A je formula stupňa n_1 a B je formula stupňa n_2, tak $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 2.18 (Stupeň formuly presnejšie a symbolicky)

Stupeň $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_\mathcal{L}$ definujeme pre všetky formuly A, $B \in \mathcal{E}_\mathcal{L}$ nasledovne:

- $\deg(A) = 0$, ak $A \in \mathcal{A}_\mathcal{L}$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$,
- $\deg((A \land B)) = \deg((A \lor B)) = \deg((A \to B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$.

Indukcia na stupeň formuly

Pomocou stupňa vieme indukciu na konštrukciu formuly zredukovať na špeciálny prípad matematickej indukcie:

Veta 2.19 (Princíp indukcie na stupeň formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne

1. *báza indukcie: každá formula stupňa 0 má vlastnosť P,*
2. *indukčný krok: pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako $\deg(X)$ majú vlastnosť P, vyplýva, že aj X má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Sémantika výrokovologických formúl

Význam formúl výrokovologickej časti logiky prvého rádu popíšeme podobne ako význam atomických formúl pomocou **štruktúr**.

Štruktúra pre jazyk

Definícia štruktúry takmer nemení:

Definícia 2.20

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde
D je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná ***doména*** štruktúry $\mathcal{M}$;
i je zobrazenie, nazývané ***interpretačná funkcia*** štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Pravdivosť formuly v štruktúre

Definícia 2.21

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Reláciu ***formula** A **je pravdivá v štruktúre** $\mathcal{M}$* ($\mathcal{M} \models A$) definujeme **induktívne** pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n všetky konštanty $c_1, c_2, \dots, c_n$, a všetky formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,

kde $\mathcal{M} \not\models A$ skracuje A *nie je pravdivá v* $\mathcal{M}$.

Príklad 2.22

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{p}) = \{1, 3\}$.

Zistime, či $\mathcal{M} \models (\neg(\mathtt{p}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{p}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{p}(\mathtt{Sarah}))$.

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):

- $(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$
  - $\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$
    - $(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$
      - $\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$
        - $i(\mathtt{Jim})$
          - 2
        - $i(\mathtt{príde})$
          - $\{1, 3\}$
      - $\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$
        - $\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$
          - $i(\mathtt{Kim})$
            - 1
          - $i(\mathtt{príde})$
            - $\{1, 3\}$
  - $\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
    - $\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
      - $i(\mathtt{Sarah})$
        - 3
      - $i(\mathtt{príde})$
        - $\{1, 3\}$

Vyhodnotenie pravdivosti formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):

- $\mathcal{M} \not\models (\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$
  - $\mathcal{M} \models \neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$
    - $\mathcal{M} \not\models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$
      - $\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$
        - $i(\mathtt{Jim}) \notin i(\mathtt{príde})$
          - $2 \notin \{1, 3\}$
      - $\mathcal{M} \not\models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$
        - $\mathcal{M} \models \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$
          - $i(\mathtt{Kim}) \in i(\mathtt{príde})$
            - $1 \in \{1, 3\}$
  - $\mathcal{M} \not\models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
    - $\mathcal{M} \models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
      - $i(\mathtt{Sarah}) \in i(\mathtt{príde})$
        - $3 \in \{1, 3\}$

Príklad 2.23 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Vyhodnotenie pravdivosti môžeme zapísať aj tabuľkou:

	$p(J)$	$p(K)$	$\neg p(K)$	$(p(J) \lor \neg p(K))$	$\neg(p(J) \lor \neg p(K))$	…
$\mathcal{M}$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	

		$p(S)$	$\neg p(S)$	$(\neg(p(J) \lor \neg p(K)) \to \neg p(S))$
…	$\mathcal{M}$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$

kde $p = \mathtt{príde}$, $K = \mathtt{Kim}$, $J = \mathtt{Jim}$ a $S = \mathtt{Sarah}$.

Všimnite si, že v záhlaví tabuľky
je vytvárajúca postupnosť vyhodnocovanej formuly.

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$
vtt

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo
$\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo
$\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo
    $\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$ alebo
    $\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt

Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo
    $\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$ alebo
    $\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt $i(\mathtt{Jim}) \in i(\mathtt{príde})$ alebo $i(\mathtt{Kim}) \notin i(\mathtt{príde})$ alebo
    $i(\mathtt{Sarah}) \notin i(\mathtt{príde})$.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Teórie a ich modely

Medzi základnými logickými pojmami z úvodnej prednášky boli teória a model.

Neformálne je **teória** súbor tvrdení, ktoré pokladáme za pravdivé.

Zvyčajne popisujú našu predstavu o zákonitostiach platných v nejakej časti sveta a pozorovania o jej stave.

Príklad 2.25

Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.
Organizujeme párty a P0: chceme, aby na ňu prišiel niekto z nich.
Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepríde na párty, ak príde Kim.

P2: Jim príde na párty, len ak príde Kim.

P3: Sarah nepríde bez Jima.

Výrokovologické teórie

V logike prvého rádu tvrdenia zapisujeme formulami.
Teóriu preto budeme chápať ako súbor (čiže množinu) formúl.

Definícia 2.26

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Každú množinu formúl jazyka $\mathcal{L}$ budeme nazývať ***teóriou*** v jazyku $\mathcal{L}$.

Príklad 2.27

$$\begin{aligned}
T_{\text{party}} = \{&((\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \lor \texttt{príde}(\texttt{Jim})) \lor \texttt{príde}(\texttt{Sarah})),\\
&(\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})),\\
&(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \to \texttt{príde}(\texttt{Kim})),\\
&(\texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \to \texttt{príde}(\texttt{Jim}))\}
\end{aligned}$$

Neformálne je *modelom* teórie stav vybranej časti sveta,
v ktorom sú všetky tvrdenia v teórii pravdivé.

Pre logiku prvého rádu stavy sveta vyjadrujú štruktúry.

Príklad 2.28 (Model teórie o party)

$$\mathcal{M} = (\{\mathrm{k}, \mathrm{j}, \mathrm{s}, \mathrm{e}, \mathrm{h}\}, i),$$

$$i(\mathtt{Kim}) = \mathrm{k}, \qquad i(\mathtt{Jim}) = \mathrm{j}, \qquad i(\mathtt{Sarah}) = \mathrm{s},$$

$$i(\mathtt{príde}) = \{\mathrm{k}, \mathrm{j}, \mathrm{e}\};$$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models ((\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) \\
\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) \\
\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \\
\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}))
\end{array}\right\} \mathcal{M} \models T_{\text{party}}$$

Definícia 2.29 (Model)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.

Teória T je ***pravdivá*** v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models T$, vtt **každá** formula X z T je pravdivá v $\mathcal{M}$ (teda $\mathcal{M} \models X$).

Hovoríme tiež, že $\mathcal{M}$ je ***modelom*** T.

Teória T je ***nepravdivá*** v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models T$, vtt T nie je pravdivá v $\mathcal{M}$.

Výrokovologické spojky a ohodnotenia

Výrokovologické ohodnotenia

Nekonečne veľa štruktúr

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia,
ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{&((\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})),\\ &(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})),\\ &(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})),\\ &(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}))\} \end{aligned}$$

Ale štruktúr je nekonečne veľa a ak má teória jeden model,
má aj nekonečne veľa ďalších:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}\}, i_1) & \mathcal{M}_1' = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, 0, 1\}, i_1') & \mathcal{M}_1'' = (\{2, 4, 6\}, i_1'') & \cdots \\ i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} & i_1'(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} & i_1''(\mathtt{Kim}) = 2 & \\ i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} & i_1'(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} & i_1''(\mathtt{Jim}) = 4 & \\ i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} & i_1'(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} & i_1''(\mathtt{Sarah}) = 6 & \\ i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}\} & i_1'(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, 1\} & i_1''(\mathtt{príde}) = \{2, 4\} & \end{array}$$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1) \qquad \mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2) \qquad \mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$$

$$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} \qquad i_2(\mathtt{Kim}) = 1 \qquad i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$$

$$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} \qquad i_2(\mathtt{Jim}) = 2 \qquad i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$$

$$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} \qquad i_2(\mathtt{Sarah}) = 3 \qquad i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$$

$$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\} \qquad i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\} \qquad i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\mathtt{Kim} \doteq \mathtt{Jim}$.

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}$	$i_2(\mathtt{Kim}) = 1$	$i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}$	$i_2(\mathtt{Jim}) = 2$	$i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj}$
$i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$	$i_2(\mathtt{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s}$
$i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\}$	$i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\mathtt{Kim} \doteq \mathtt{Jim}$.

Zhodujú sa na pravdivosti všetkých predikátových atómov $\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$, $\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$, $\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.

V T_{party} na ničom inom nezáleží.

Ohodnotenie atómov

Z každej zo štruktúr

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_1 = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i_1) & \mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2) & \mathcal{M}_3 = (\{\mathtt{kj}, \mathtt{s}\}, i_3) \\
i_1(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k} & i_2(\mathtt{Kim}) = 1 & i_3(\mathtt{Kim}) = \mathtt{kj} \\
i_1(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j} & i_2(\mathtt{Jim}) = 2 & i_3(\mathtt{Jim}) = \mathtt{kj} \\
i_1(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} & i_2(\mathtt{Sarah}) = 3 & i_3(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s} \\
i_1(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\} & i_2(\mathtt{príde}) = \{1, 2\} & i_3(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{kj}\}
\end{array}
$$

môžeme skonštruovať to isté ohodnotenie predikátových atómov:

$$
\begin{array}{ll}
v(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) = t & \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}), \\
v(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) = t & \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}), \\
v(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) = f & \text{lebo } \mathcal{M}_j \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}).
\end{array}
$$

Všetky tieto štruktúry (a nekonečne veľa ďalších) vieme pri vyhodnocovaní formúl jazyka $\mathcal{L}_{\text{party}}$ nahradiť týmto ohodnotením.

Definícia 2.30

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Výrokovologickými formulami jazyka $\mathcal{L}$ nazveme všetky formuly jazyka $\mathcal{L}$, ktoré **neobsahujú symbol rovnosti**. Množinu všetkých výrokovologických formúl jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 2.31

Nech (f, t) je usporiadaná dvojica ***pravdivostných hodnôt***, $f \neq t$, kde f predstavuje ***nepravdu*** a t predstavuje ***pravdu***.
Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Výrokovologickým ohodnotením pre $\mathcal{L}$, skrátene ***ohodnotením***, nazveme každé zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$.

Pravdivé formuly v ohodnotení

Ako vyhodnotíme, či je formula pravdivá v nejakom ohodnotení?

Definícia 2.32

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a nech $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Reláciu ***výrokovologická formula A je pravdivá v ohodnotení v*** ($v \models_p A$) definujeme **induktívne** pre všetky predikátové atómy a a všetky výrokovologické formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $v \models_p a$ vtt $v(a) = t$,
- $v \models_p \neg A$ vtt $v \not\models_p A$,
- $v \models_p (A \land B)$ vtt $v \models_p A$ a zároveň $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \lor B)$ vtt $v \models_p A$ alebo $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \to B)$ vtt $v \not\models_p A$ alebo $v \models_p B$,

kde **vtt** skracuje *vtedy a len vtedy* a $v \not\models_p A$ skracuje A *nie je pravdivá vo* v.

Vyhodnotenie formuly v ohodnotení

Príklad 2.33

Vyhodnoťme formulu

$$X = ((\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$$

vo výrokovologickom ohodnotení

$$v = \{\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \mapsto t,\ \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \mapsto t,\ \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}) \mapsto f\}$$

zdola nahor:

	$\mathtt{p}(\mathtt{Kim})$	$\mathtt{p}(\mathtt{Jim})$	$\mathtt{p}(\mathtt{Sarah})$	$\neg\mathtt{p}(\mathtt{Kim})$	$(\mathtt{p}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{p}(\mathtt{Kim}))$	X
v	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$

$\mathtt{príde}$ sme skrátili na $\mathtt{p}$.

Definícia 2.34

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty,
$v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$
a $S \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ je množina predikátových atómov.

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom ***zhodné na S*** vtt
pre každý predikátový atóm $A \in S$ platí

$$v(A) = t \text{ vtt } \mathcal{M} \models A.$$

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom ***zhodné*** vtt
sú zhodné na $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Konštrukcia ohodnotenia zhodného so štruktúrou

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou zostrojíme ľahko:

Tvrdenie 2.35

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a (f, t) sú pravdivostné hodnoty. Zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ definované pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

$$v(A) = \begin{cases} t, & \textit{ak } \mathcal{M} \models A, \\ f, & \textit{ak } \mathcal{M} \not\models A \end{cases}$$

je výrokovologické ohodnotenie zhodné s $\mathcal{M}$.

Dôkaz.

Pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ musíme dokázať, že $v(A) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$:
($\Leftarrow$) Priamo: Ak $\mathcal{M} \models A$, tak $v(A) = t$ podľa jeho definície v leme.
($\Rightarrow$) Nepriamo: Ak $\mathcal{M} \not\models A$, tak $v(A) = f$ podľa jeho definície v leme, a pretože $t \neq f$, tak $v(A) \neq t$. $\square$

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 2.36 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$, kde

$$v(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre $\mathcal{L}$ zhodnú s v.

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 2.36 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$, kde

$$v(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) = t \quad v(\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre $\mathcal{L}$ zhodnú s v.

Možnosťou, ktorú ľahko zovšeobecníme na všetky jazyky,
je použiť ako doménu množinu konštánt:

$$\mathcal{M} = (\underbrace{\{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}}_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}, i)$$

Každú konštantu interpretujeme ňou samou:

$$i(\mathtt{Kim}) = \mathtt{Kim} \qquad i(\mathtt{Jim}) = \mathtt{Jim} \qquad i(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{Sarah}$$

predikát $\mathtt{príde}$ ako množinu tých c, pre ktoré $v(\mathtt{príde}(c)) = t$:

$$i(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}\}$$

Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením

Ako zostrojíme štruktúru zhodnú s ohodnotením pre hocijaký jazyk?

Tvrdenie 2.37

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ s doménou $D = \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a interpretačnou funkciou definovanou pre všetky $n > 0$, všetky konštanty c a všetky predikátové symboly $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n takto:

$$i(c) = c$$

$$i(P) = \{\, (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}^n \mid v(P(c_1, \dots, c_n)) = t \,\}$$

Potom $\mathcal{M}$ je zhodná s v.

Štruktúram zo syntaktického materiálu sa hovorí herbrandovské.

Zhoda na všetkých výrokovologických formulách

Tvrdenie 2.38

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$. Potom pre každú výrokovologickú formulu $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

Zhoda na všetkých výrokovologických formulách

Tvrdenie 2.38

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$. Potom pre každú výrokovologickú formulu $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

Dôkaz (indukciou na konštrukciu formuly).

1.1: Nech X je rovnostný atóm. Potom nie je výrokovologickou formulou a tvrdenie preň triviálne platí.
1.2: Nech X je predikátový atóm. Potom $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $v(X) = t$ vtt $\mathcal{M} \models X$ podľa def. zhodnosti v a $\mathcal{M}$.
2.1: Indukčný predpoklad: Nech tvrdenie platí pre formulu X.
Dokážme tvrdenie pre $\neg X$. Ak X neobsahuje symbol rovnosti $\doteq$, potom $v \models_{\mathrm{p}} \neg X$ vtt (podľa def. $\models_{\mathrm{p}}$) $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ vtt (podľa IP) $\mathcal{M} \not\models X$ vtt (podľa def. $\models$) $\mathcal{M} \models \neg X$. Ak X obsahuje $\doteq$, $\neg X$ ho obsahuje tiež, teda nie je výrokovologická a tvrdenie pre ňu platí triviálne.
2.2: IP: Nech tvrdenie platí pre formuly X a Y. Ak X alebo Y obsahuje $\doteq$, tvrdenie platí pre $(X \land Y)$, $(X \lor Y)$, $(X \to Y)$ triviálne, lebo nie sú výrokovologické. Nech teda X ani Y neobsahuje $\doteq$. Potom platí $v \models_{\mathrm{p}} (X \to Y)$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \not\models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \to Y)$. Podobne pre ďalšie spojky. $\square$