Kvantifikátory

7. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2023/2024

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 7. prednášky

- Kvantifikátory
  - Kvantifikácia
  - Kvantifikátory a premenné
  - Syntax relačnej logiky prvého rádu
  - Sémantika relačnej logiky prvého rádu
  - Neexistencia
  - Aristotelovské formy
  - Zamlčané a zdanlivo opačné kvantifikátory
  - Nutné a postačujúce podmienky
  - Zložené kvantifikované vlastnosti
  - Konverzačné implikatúry
  - Vyhýbanie sa chybám

Kvantifikátory

Kvantifikátory

Kvantifikácia

Prívlastky

Doteraz sme sa stretávali s prívlastkami, ktoré vyjadrovali vlastnosti alebo vzťahy **konkrétnych jednotlivých** objektov.

- Jurko kŕmi **veľkú Vierkinu myš** Ňufka.
  $(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, \mathtt{Ňufko}) \land \mathtt{veľký}(\mathtt{Ňufko}) \land$
  $\mathtt{patrí}(\mathtt{Ňufko}, \mathtt{Vierka}) \land \mathtt{myš}(\mathtt{Ňufko}))$

Kvantifikované tvrdenia

V slovenských vetách sa ale používajú aj prívlastky ako
každý, **nejaká**, **tri**, **tí**, **všetky**, **žiadny**, **nijaké**
(gramaticky sú to zámená a číslovky).

- všetky veľké Vierkine myši; nejaké dieťa; traja muži v člne; žiadny Košičan; väčšina škrečkov; tá skriňa v kúte; …

Nevyjadrujú vlastnosť konkrétnych objektov.

Vyjadrujú počet (kvantitu) objektov, ktoré majú nejaké vlastnosti alebo sú v nejakých vzťahoch.

Tvrdeniam, ktoré obsahujú tieto prívlastky,
sa preto v logike **kvantifikované tvrdenia**.

Kvantifikácia a logické dôsledky

Kvantifikujúci prívlastok výrazne mení logické vlastnosti tvrdenia:

Všetky myši sú sivé. Ňufko je myš.	Väčšina myší je sivá. Ňufko je myš.	Žiadne myši nie sú sivé. Ňufko je myš.
Ňufko je sivý.	Ňufko je sivý.	Ňufko je sivý.
Je logický dôsledok.	Nie je log. dôsledkom, ale je prijateľné.	Nie je log. dôsledkom, ani prijateľné. Opak je pravdou.

Kvantifikácia sa nespráva ako funkcia na pravdivostných hodnotách — na rozdiel od logických spojok.

Vyjadruje vzťah súborov (tried, množín) objektov (tých objektov, ktoré sú myšami, a tých objektov, ktoré sú sivé).

Skrytá kvantifikácia

Niektoré spojky a vzťahy implicitne vyjadrujú kvantifikáciu:

- Jurko kŕmi Ňufka, iba **keď** je noc.
  Jurko kŕmi Ňufka **vždy** v noci.
  V **každej** chvíli, v ktorej Jurko kŕmi Ňufka, je noc.
- V pondelok cvičí Klárka hru na flautu.
  V **každý** deň, ktorý je pondelkom, cvičí Klárka hru na flautu.
- Z P **logicky vyplýva** Q.
  V **každom** stave sveta, v ktorom je pravdivé P, je pravdivé aj Q.

Kvantifikátory

Kvantifikátory a premenné

Kvantifikátory logiky prvého rádu

Logika prvého rádu má iba dva symboly kvantifikátorov: $\forall$ a $\exists$.

Zodpovedajú zámenám **všetko** a **niečo**.

S pomocou predikátov, výrokovologických spojok a rovnosti ale dokážu vyjadriť napr. kvantifikácie:

- všetky veľké Vierkine myši; nejaké dieťa; traja muži v člne; žiadny Košičan; zakaždým, keď.

Nedokážeme však nimi vyjadriť:

- väčšina škrečkov; málo študentov; nekonečne veľa prvočísel.

Kvantifikované *premenné označujú výhradne objekty z domény*, nemožno kvantifikovať množiny objektov ani nič zložitejšie.

Premenné

Na vyjadrenie toho, na ktoré argumenty predikátov sa vzťahuje kvantifikátor, sa používajú indivíduové premenné.

Indivíduová premenná

- môže byť argumentom predikátu,
  podobne ako indivíduová konštanta;
- neoznačuje konkrétny objekt,
  na rozdiel od indivíduovej konštanty,
  ale prepája argumenty predikátov,
  na ktoré sa vzťahuje ten istý kvantifikátor.

V každom prvorádovom jazyku s kvantifikátormi je nekonečne veľa premenných — väčšinou malé písmená z konca abecedy, podľa potreby s dolnými indexmi: u, v_4, w, x, y_{37}, z_{123}.

Termy a atómy

Možné argumenty predikátov a rovnosti, teda premenné a konštanty, súhrnne nazývame *termy*.

Atomickými formulami logiky prvého rádu s kvantifikátormi sú potom

- predikátové atómy $\mathtt{predikát}(\mathtt{term}_1, \dots, \mathtt{term}_k)$, kde k je arita predikátu;
- rovnostné atómy $\mathtt{term}_1 \doteq \mathtt{term}_2$.

Všeobecný kvantifikátor

Všeobecný kvantifikátor $\forall$ zodpovedá obratom *všetko*, *každý/ktorýkoľvek/akýkoľvek/hociktorý/ľubovoľný objekt*, *všetky objekty*.

Vždy **viaže** premennú uvedenú bezprostredne za ním.

Postupnosť $\forall x$ čítame **„pre každý objekt x“** (alebo trocha nepresne „pre každé x“).

Oblasť platnosti všeobecného kvantifikátora — **najkratšia ucelená** formula nasledujúca bezprostredne za viazanou premennou — vyjadruje vlastnosť, ktorú prisudzujeme všetkým objektom, napr.:

- $\forall x\, \mathtt{doma}(x)$ — Pre každý objekt x je pravda, že x je doma. (Všetko je doma.) Veta „x je doma“ je **výroková forma**, nie výrok.
  Jej pravdivosť sa dá jednoznačne určiť, iba keď poznáme hodnotu x.
- $\forall x(\mathtt{človek}(x) \to \mathtt{doma}(x))$ — Pre každý objekt x je pravda, že ak x je človek, tak x je doma. (Každý človek je doma.)

Existenčný kvantifikátor

***Existenčný kvantifikátor* $\exists$** zodpovedá obratom *niečo*,
nejaký/niektorý/akýsi/aspoň jeden objekt,
je/existuje taký objekt.

Vždy **viaže** premennú uvedenú bezprostredne za ním.

Postupnosť $\exists x$ čítame **„pre nejaký objekt x“**
(alebo trocha nepresne „pre nejaké x“).

Oblasť platnosti existenčného kvantifikátora — je **najkratšia ucelená** formula nasledujúca bezprostredne za viazanou premennou — vyjadruje vlastnosť, o ktorej tvrdíme, že ju má aspoň jeden objekt:

- $\exists x\, \mathtt{doma}(x)$ — Pre nejaký objekt x je pravda, že x je doma. (Niečo je doma.)
- $\exists x(\mathtt{človek}(x) \land \mathtt{doma}(x))$ — Pre nejaký objekt x je pravda, že x je človek a x je doma. (Nejaký človek je doma.)

Kvantifikátory

Syntax relačnej logiky prvého rádu

Symboly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Definícia 7.1

Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu sú:

indivíduové premenné z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}_\mathcal{L}$;

mimologické symboly, ktorými sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$;
- *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_\mathcal{L}$;

logické symboly, ktorými sú

- *logické spojky:* unárna $\neg$, binárne $\land$, $\lor$, $\to$,
- *symbol rovnosti* $\doteq$,
- *kvantifikátory:* *existenčný* $\exists$ a *všeobecný* $\forall$;

pomocné symboly **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{V}_\mathcal{L}$, $\mathcal{C}_\mathcal{L}$, $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ sú vzájomne disjunktné.
Logické a pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{V}_\mathcal{L}$, $\mathcal{C}_\mathcal{L}$, $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Označovanie symbolov rôznych druhov

Keď budeme hovoriť o **ľubovoľnom** jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme ***meta premenné***:
premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť **o** (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 7.2

Indivíduové premenné budeme spravidla označovať meta premennými $u, v, w, x, \ldots, z$ s prípadnými dolnými indexmi.

Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly relačnej logiky prvého rádu

Definícia 7.3 (Term)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu. Indivíduové premenné z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ a konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ súhrnne nazývame *termy* jazyka $\mathcal{L}$.

Definícia 7.4 (Atomické formuly)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $t_1 \doteq t_2$, kde t_1 a t_2 sú termy jazyka $\mathcal{L}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(t_1, \dots, t_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a $t_1, \dots, t_n$ sú termy jazyka $\mathcal{L}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Formuly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Definícia 7.5

Množina $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ všetkých ***formúl*** jazyka relačnej logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ je **najmenšia** množina postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_\mathcal{L}$ je formulou z $\mathcal{E}_\mathcal{L}$. Inak povedané, $\mathcal{A}_\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}_\mathcal{L}$.
2. Ak A patrí do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$

   a nazývame ju ***negácia*** formuly A.
3. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_\mathcal{L}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$

   a nazývame ich postupne ***konjunkcia***, ***disjunkcia*** a ***implikácia*** formúl A a B.
4. Ak x je indivíduová premenná a A patrí do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$, tak aj postupnosti symbolov $\exists x\, A$ a $\forall x\, A$ patria do $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ a nazývame ich postupne

   existenčná a ***všeobecná kvantifikácia*** formuly A vzhľadom na x.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ nazývame ***formulou*** jazyka $\mathcal{L}$.

Príklad 7.6

Nech $\mathcal{L}$ je prvorádový jazyk, v ktorom $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$,
$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\texttt{Jurko}, \texttt{Vierka}, \texttt{Ňufko}\}$
$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\texttt{myš}^1, \texttt{škrečok}^1, \texttt{biely}^1, \texttt{patrí}^2\}$.

Formulami v jazyku $\mathcal{L}$ sú napríklad:
$\texttt{myš}(\texttt{Jurko})$, $\texttt{myš}(x)$, $\texttt{patrí}(y_2, \texttt{Vierka})$, $\texttt{patrí}(x, y)$,
$(\texttt{myš}(x) \land \texttt{biely}(x))$,
$\exists y\, \texttt{patrí}(x, y)$,
$\big((\texttt{myš}(x) \land \texttt{biely}(x)) \to \exists y\, \texttt{patrí}(x, y)\big)$,
$\forall x\big((\texttt{myš}(x) \land \texttt{biely}(x)) \to \exists y\, \texttt{patrí}(x, y)\big)$

Označovanie formúl a skratka ekvivalencie

Stále platia doterajšie dohody:

Dohoda 7.7

Formuly označujeme meta premennými $A, B, C, X, Y, Z,$ s prípadnými dolnými indexmi.

Dohoda 7.8

Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \to B) \land (B \to A))$.

Oblasť platnosti kvantifikátora

Dohoda 7.9

Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk logiky prvého rádu. Všetky symboly, termy a formuly v nasledujúcich definíciách a tvrdeniach sú v jazyku $\mathcal{L}$.

Definícia 7.10 (Oblasť platnosti kvantifikátora)

Nech A je postupnosť symbolov, nech B je formula,
nech $Q \in \{\forall, \exists\}$, nech x je premenná.
V postupnosti $A = \dots Q\,x\,B \dots$ sa výskyt formuly $Q\,x\,B$ nazýva ***oblasť platnosti kvantifikátora $Q\,x$ v A***.

Príklad 7.11

Vyznačme všetky oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ vo formule

$$\big((\forall x\, M(x) \land P(x,x)) \to \big(\forall x(P(x,y) \land \exists y\, M(y)) \lor \forall y\, M(y)\big)\big).$$

Voľné a viazané výskyty premenných

Definícia 7.12 (Voľné a viazané výskyty premenných)

Nech A je postupnosť symbolov, nech x je premenná.

Výskyt premennej x v A je *viazaný* vtt

sa *nachádza v niektorej* oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ alebo $\exists x$ v A.

Výskyt premennej x A je *voľný* vtt

sa *nenachádza v žiadnej* oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ ani $\exists x$ v A.

Príklad 7.13

$$\neg P(x, y) \land K(y, x)$$
$$\neg P(x, y) \land \exists \underline{y} K(\underline{y}, x)$$
$$\exists \underline{y} (\neg P(x, \underline{y}) \land K(\underline{y}, x))$$
$$\forall \underline{x} \exists \underline{y} (\neg P(\underline{x}, \underline{y}) \land K(\underline{y}, \underline{x}))$$
$$\forall \underline{x} (\neg P(\underline{x}, y) \land \exists \underline{y} K(\underline{y}, \underline{x}))$$

Voľné a viazané premenné

Definícia 7.14 (Voľné a viazané premenné)

Nech A je formula alebo term, nech x je premenná.

Premenná x je *viazaná* v A vtt

x sa vyskytuje v A a *všetky* výskyty x v A sú viazané.

Premenná x je *voľná* v A vtt x má v A *aspoň jeden voľný výskyt*.

Množinu voľných premenných formuly A označíme $\operatorname{free}(A)$.

Príklad 7.15

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{free}(\neg P(x, y) \land K(y, z)) = \{x, y, z\}\\
&\operatorname{free}(\neg P(x, y) \land \exists \underline{y} K(\underline{y}, z)) = \{x, y, z\}\\
&\operatorname{free}(\exists \underline{y} (\neg P(x, \underline{y}) \land K(\underline{y}, z))) = \{x, z\}\\
&\operatorname{free}(\exists \underline{y} (\neg P(x, \underline{y}) \land \forall \underline{z} K(\underline{y}, \underline{z}))) = \{x\}\\
&\operatorname{free}(\exists \underline{y} \exists \underline{z} (\forall \underline{x} \neg P(\underline{x}, \underline{y}) \land K(\underline{y}, \underline{z}))) = \{\}
\end{aligned}
$$

Voľné a viazané premenné

Tvrdenie 7.16

Pre každú indivíduovú premennú x, každý symbol konštanty a, každú aritu $n > 0$, každý predikátový symbol P s aritou n, všetky termy $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a všetky formuly A, B platí:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{free}(\, x \,) &= \{x\} \\
\mathrm{free}(\, a \,) &= \{\} \\
\mathrm{free}(\, t_1 \doteq t_2 \,) &= \mathrm{free}(t_1) \cup \mathrm{free}(t_2) \\
\mathrm{free}(\, P(t_1, \ldots, t_n) \,) &= \mathrm{free}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{free}(t_n) \\
\mathrm{free}(\, \neg A \,) &= \mathrm{free}(A) \\
\mathrm{free}(\, (A \land B) \,) &= \mathrm{free}(\, (A \lor B) \,) = \mathrm{free}(\, (A \to B) \,) = \\
&= \mathrm{free}(A) \cup \mathrm{free}(B) \\
\mathrm{free}(\, \forall x\, A \,) &= \mathrm{free}(\, \exists x\, A \,) = \mathrm{free}(A) \setminus \{x\}
\end{aligned}
$$

Uzavreté formuly a teórie

Definícia 7.17 (Uzavretá formula, teória)

Formula A jazyka $\mathcal{L}$ je *uzavretá* vtt

žiadna premenná nie je voľná v A

(teda $\mathrm{free}(A) = \emptyset$).

Teóriou v jazyku $\mathcal{L}$ je každá

spočítateľná množinu uzavretých formúl jazyka $\mathcal{L}$.

Príklad 7.18

Ktoré z týchto formúl sú uzavreté?

- $\exists x\, P(x, x)$,
- $\exists y\, P(x, y)$,
- $\big((M(x) \land B(x)) \to \exists y\, P(x, y)\big)$,
- $\forall x\big((M(x) \land B(x)) \to \exists y\, P(x, y)\big)$.

Kvantifikátory

Sémantika relačnej logiky prvého rádu

Štruktúra

Definícia 7.19

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

D je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$;

i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každej indivíduovej konštante c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Dohoda 7.20

Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$.

Ohodnotenie indivíduových premenných

Definícia 7.21

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.
Ohodnotenie indivíduových premenných je ľubovoľná funkcia $e : \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \to D$ (priraďuje premenným prvky domény).

Nech ďalej x je indivíduová premenná z $\mathcal{L}$ a d je prvok D.
Zápisom $e(x/d)$ označíme ohodnotenie indivíduových premenných, ktoré premennej x priraďuje hodnotu d
a všetkým ostatným premenným rovnakú hodnotu ako im priraďuje e, čiže

$$e(x/d)(y) = \begin{cases} d, & \text{ak } y = x, \\ e(y), & \text{ak } y \neq x, \end{cases}$$

alebo množinovo zapísané $e(x/d) = e \setminus \{x \mapsto e(x)\} \cup \{x \mapsto d\}$.

Príklad ohodnotenia indivíduových premenných

Nech

$$\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x_1, x_2, y, \ldots\}$$
$$D = \{{}_{\text{Alica}}, {}_{\text{Bonifác}}, {}_{\text{Cyril}}\}.$$

Ohodnotením (indivíduových) premenných je napríklad

$$e = \{x_1 \mapsto {}_{\text{Bonifác}}, x_2 \mapsto {}_{\text{Alica}}, y \mapsto {}_{\text{Bonifác}}, \ldots\}$$

Potom

$$e(y/{}_{\text{Cyril}}) = \{x_1 \mapsto {}_{\text{Bonifác}}, x_2 \mapsto {}_{\text{Alica}}, y \mapsto {}_{\text{Cyril}}, \ldots\}$$

Hodnota termov

Definícia 7.22

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných. *Hodnotou termu t v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení premenných e* je prvok $t^{\mathcal{M}}[e]$ z D určený nasledovne:

- $t^{\mathcal{M}}[e] = e(x)$, ak t je premenná $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$,
- $t^{\mathcal{M}}[e] = i(a)$, ak t je konštanta $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Splnenie atomickej formuly v štruktúre

Určenie významu atomickej formuly, napr. $\mathtt{patrí}(x, \mathtt{Vierka})$,
v danej štruktúre, napr. $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$D = \{$$_{\text{Viera}}$, $_{\text{Juraj}}$, $_{\text{Eva}}$, , , , , $\}$

$i(\mathtt{Vierka}) =$ $_{\text{Viera}}$,

$i(\mathtt{Jurko}) =$ $_{\text{Juraj}}$,

$i(\mathtt{Ňufko}) =$ 

$i(\mathtt{biele}) = \{$, , $\}$

$i(\mathtt{patrí}) = \{\,($, $_{\text{Viera}})$, $($, $_{\text{Eva}})\,\}$

pri ohodnotení premenných, napr. $e = \{x \mapsto$ , $y \mapsto$ $_{\text{Eva}}, \ldots\}$:

Splnenie atomickej formuly v štruktúre

Určenie významu **atomickej** formuly, napr. $\texttt{patrí}(x, \texttt{Vierka})$,
v danej štruktúre, napr. $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$D = \{$👩$_{\text{Viera}}$, 👨$_{\text{Juraj}}$, 👩$_{\text{Eva}}$, 🐕, 🐈, 🐉, 🐎, 🐦$\}$

$i(\texttt{Vierka}) =$ 👩$_{\text{Viera}}$, $i(\texttt{biele}) = \{$🐉, 🐎, 🐦$\}$ $i(\texttt{patrí}) = \{$(🐎, 👩$_{\text{Viera}}$), (🐉, 👩$_{\text{Eva}}$)$\}$

$i(\texttt{Jurko}) =$ 👨$_{\text{Juraj}}$,

$i(\texttt{Ňufko}) =$ 🐉

pri ohodnotení premenných, napr. $e = \{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 👩$_{\text{Eva}}$, …$\}$:

1. vyhodnotíme termy, ktoré sú argumentmi predikátu:

   $x^{\mathcal{M}}[e] = e(x) =$ 🐉

   $\texttt{Vierka}^{\mathcal{M}}[e] = i(\texttt{Vierka}) =$ 👩$_{\text{Viera}}$,

2. zistíme, či (🐉, 👩$_{\text{Viera}}$) $\in i(\texttt{patrí})$: **nie**

Štruktúra $\mathcal{M}$ **nespĺňa** formulu $\texttt{patrí}(x, \texttt{Vierka})$ **pri ohodnotení** e

$$\mathcal{M} \not\models \texttt{patrí}(x, \texttt{Vierka})\,[e]$$

Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \exists y\, \mathtt{patr\acute{\imath}}(y, \mathtt{Vierka})\,[e]$?

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e, ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej y jednotlivé prvky domény:

$e(y/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} \mathtt{patr\acute{\imath}}(y, \mathtt{Vierka})\,[e(y/d)]$
$\{x \mapsto\ , y \mapsto\ _{\text{Viera}}, \ldots\}$	?
$\vdots$	
$\{x \mapsto\ , y \mapsto\ , \ldots\}$	
$\{x \mapsto\ , y \mapsto\ , \ldots\}$	
$\{x \mapsto\ , y \mapsto\ , \ldots\}$	

$D = \{\ _{\text{Viera}},\ _{\text{Juraj}},\ _{\text{Eva}},\ ,\ ,\ ,\ ,\ \}$

$i(\mathtt{Vierka}) = \ _{\text{Viera}},$

$i(\mathtt{Jurko}) = \ _{\text{Juraj}},$

$i(\mathtt{\check{N}ufko}) =$

$i(\mathtt{biele}) = \{\ ,\ ,\ \}$

$i(\mathtt{patr\acute{\imath}}) = \{(\ ,\ _{\text{Viera}}), (\ ,\ _{\text{Eva}})\}$

$e = \{x \mapsto\ , y \mapsto\ _{\text{Eva}}, \ldots\}$

Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \exists y\, \texttt{patrí}(y, \texttt{Vierka})\,[e]$?

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e, ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej y jednotlivé prvky domény:

$e(y/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} \texttt{patrí}(y, \texttt{Vierka})\,[e(y/d)]$
$\{x \mapsto ,\ y \mapsto {}_{\text{Viera}}, \ldots\}$	$\not\models$
$\vdots$	$\vdots$
$\{x \mapsto ,\ y \mapsto , \ldots\}$	?
$\{x \mapsto ,\ y \mapsto , \ldots\}$	
$\{x \mapsto ,\ y \mapsto , \ldots\}$	

$D = \{{}_{\text{Viera}}, {}_{\text{Juraj}}, {}_{\text{Eva}}, , , , , \}$

$i(\texttt{Vierka}) = {}_{\text{Viera}}$,

$i(\texttt{Jurko}) = {}_{\text{Juraj}}$,

$i(\texttt{Ňufko}) = $

$i(\texttt{biele}) = \{, , \}$

$i(\texttt{patrí}) = \{(, {}_{\text{Viera}}), (, {}_{\text{Eva}})\}$

$e = \{x \mapsto ,\ y \mapsto {}_{\text{Eva}}, \ldots\}$

Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \exists y\, \texttt{patrí}(y, \texttt{Vierka})\,[e]$?

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e, ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej y jednotlivé prvky domény:

$e(y/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} \texttt{patrí}(y, \texttt{Vierka})\,[e(y/d)]$
$\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Viera}}, \ldots\}$	$\not\models$
$\vdots$	$\vdots$
$\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🐉, $\ldots\}$	$\not\models$
$\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🐎, $\ldots\}$	?
$\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🐦, $\ldots\}$	

$D = \{$🧍$_{\text{Viera}}$, 🧍$_{\text{Juraj}}$, 🧍$_{\text{Eva}}$, 🐕, 🐈, 🐉, 🐎, 🐦$\}$

$i(\texttt{Vierka}) =$ 🧍$_{\text{Viera}}$,

$i(\texttt{Jurko}) =$ 🧍$_{\text{Juraj}}$,

$i(\texttt{Ňufko}) =$ 🐉

$i(\texttt{biele}) = \{$🐉, 🐎, 🐦$\}$

$i(\texttt{patrí}) = \{$(🐎, 🧍$_{\text{Viera}}$), (🐉, 🧍$_{\text{Eva}}$)$\}$

$e = \{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}, \ldots\}$

Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \exists y\, \texttt{patrí}(y, \texttt{Vierka})\, [e]$?

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e, ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej y jednotlivé prvky domény:

$e(y/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} \texttt{patrí}(y, \texttt{Vierka})\, [e(y/d)]$
$\{x \mapsto \;, y \mapsto \;_{\text{Viera}}, \ldots\}$	$\not\models$
$\vdots$	$\vdots$
$\{x \mapsto \;, y \mapsto \;, \ldots\}$	$\not\models$
$\{x \mapsto \;, y \mapsto \;, \ldots\}$	$\models$
$\{x \mapsto \;, y \mapsto \;, \ldots\}$	$\not\models$

$D = \{\;_{\text{Viera}}, \;_{\text{Juraj}}, \;_{\text{Eva}}, \;, \;, \;, \;, \;\}$

$i(\texttt{Vierka}) = \;_{\text{Viera}}$,

$i(\texttt{Jurko}) = \;_{\text{Juraj}}$,

$i(\texttt{Ňufko}) = $

$i(\texttt{biele}) = \{\;, \;, \;\}$

$i(\texttt{patrí}) = \{(\;, \;_{\text{Viera}}), (\;, \;_{\text{Eva}})\}$

$e = \{x \mapsto \;, y \mapsto \;_{\text{Eva}}, \ldots\}$

Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \exists y\, \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e]$?

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e, ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej y jednotlivé prvky domény:

$e(y/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e(y/d)]$
$\{x \mapsto {}, y \mapsto {}_{\text{Viera}}, \dots\}$	$\not\models$
$\vdots$	$\vdots$
$\{x \mapsto {}, y \mapsto {}, \dots\}$	$\not\models$
$\{x \mapsto {}, y \mapsto {}, \dots\}$	$\models$
$\{x \mapsto {}, y \mapsto {}, \dots\}$	$\not\models$

2. $\mathcal{M} \models \exists y\, \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e]$
   vtt **pre aspoň jedno $d \in D$** máme $\mathcal{M} \models \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e(y/d)]$.
   Pravá strana je pravdivá pre $d = {}$ — *svedok*.
   Takže $\mathcal{M} \models \exists y\, \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e]$.

$D = \{{}_{\text{Viera}}, {}_{\text{Juraj}}, {}_{\text{Eva}}, , , , , \}$

$i(\mathtt{Vierka}) = {}_{\text{Viera}}$,

$i(\mathtt{Jurko}) = {}_{\text{Juraj}}$,

$i(\mathtt{Ňufko}) = {}$

$i(\mathtt{biele}) = \{ , , \}$

$i(\mathtt{patrí}) = \{ (, {}_{\text{Viera}}), (, {}_{\text{Eva}}) \}$

$e = \{x \mapsto {}, y \mapsto {}_{\text{Eva}}, \dots\}$

Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \forall x(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))\,[e]$ skrátime: $B = \mathtt{biele}$, $P = \mathtt{patrí}$

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e, ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej x jednotlivé prvky domény:

$e(x/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} (B(x) \to P(x, y))\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$ 🚺$_{\text{Viera}}$, $y \mapsto$ 🚺$_{\text{Eva}}, \ldots\}$	?
$\vdots$	
$\{x \mapsto$ 🐈, $y \mapsto$ 🚺$_{\text{Eva}}, \ldots\}$	
$\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🚺$_{\text{Eva}}, \ldots\}$	
$\{x \mapsto$ 🐎, $y \mapsto$ 🚺$_{\text{Eva}}, \ldots\}$	
$\{x \mapsto$ 🐦, $y \mapsto$ 🚺$_{\text{Eva}}, \ldots\}$	

$D = \{$🚺$_{\text{Viera}}$, 🚹$_{\text{Juraj}}$, 🚺$_{\text{Eva}}$, 🐕, 🐈, 🐉, 🐎, 🐦$\}$

$i(\mathtt{Vierka}) =$ 🚺$_{\text{Viera}}$,

$i(\mathtt{Jurko}) =$ 🚹$_{\text{Juraj}}$,

$i(\mathtt{Ňufko}) =$ 🐉

$i(\mathtt{biele}) = \{$🐉, 🐎, 🐦$\}$

$i(\mathtt{patrí}) = \{($🐎, 🚺$_{\text{Viera}}$), (🐉, 🚺$_{\text{Eva}}$)$\}$

$e = \{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🚺$_{\text{Eva}}, \ldots\}$

Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \forall x(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))\,[e]$ skrátime: $B = \mathtt{biele}$, $P = \mathtt{patrí}$

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e,
   ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej x jednotlivé prvky domény:

$e(x/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} (B(x) \to P(x, y))\,[e(x/d)]$	
$\{x \mapsto$ 🧍$_{\text{Viera}}$, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}$, $\dots\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$
$\vdots$	$\vdots$	
$\{x \mapsto$ 🐈, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}$, $\dots\}$	?	
$\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}$, $\dots\}$		
$\{x \mapsto$ 🐎, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}$, $\dots\}$		
$\{x \mapsto$ 🐦, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}$, $\dots\}$		

$D = \{$🧍$_{\text{Viera}}$, 🧍$_{\text{Juraj}}$, 🧍$_{\text{Eva}}$, 🐕, 🐈, 🐉, 🐎, 🐦$\}$

$i(\mathtt{Vierka}) =$ 🧍$_{\text{Viera}}$,

$i(\mathtt{Jurko}) =$ 🧍$_{\text{Juraj}}$,

$i(\mathtt{Ňufko}) =$ 🐉

$i(\mathtt{biele}) = \{$🐉, 🐎, 🐦$\}$

$i(\mathtt{patrí}) = \{$(🐎, 🧍$_{\text{Viera}}$), (🐉, 🧍$_{\text{Eva}}$)$\}$

$e = \{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}$, $\dots\}$

Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \forall x(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))\,[e]$ skrátime: $B = \mathtt{biele}$, $P = \mathtt{patrí}$

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e, ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej x jednotlivé prvky domény:

$e(x/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} (B(x) \to P(x, y))\,[e(x/d)]$	
$\{x \mapsto$ $_{\text{Viera}}$, $y \mapsto$ $_{\text{Eva}}, \dots\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$
$\vdots$	$\vdots$	
$\{x \mapsto$, $y \mapsto$ $_{\text{Eva}}, \dots\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$, $y \mapsto$ $_{\text{Eva}}, \dots\}$	?	
$\{x \mapsto$, $y \mapsto$ $_{\text{Eva}}, \dots\}$		
$\{x \mapsto$, $y \mapsto$ $_{\text{Eva}}, \dots\}$		

$D = \{$ $_{\text{Viera}}$, $_{\text{Juraj}}$, $_{\text{Eva}}$, , , , , $\}$

$i(\mathtt{Vierka}) =$ $_{\text{Viera}}$,

$i(\mathtt{Jurko}) =$ $_{\text{Juraj}}$,

$i(\mathtt{Ňufko}) =$

$i(\mathtt{biele}) = \{$, , $\}$

$i(\mathtt{patrí}) = \{($, $_{\text{Viera}})$, $($, $_{\text{Eva}})\}$

$e = \{x \mapsto$, $y \mapsto$ $_{\text{Eva}}, \dots\}$

Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \forall x(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))\,[e]$ skrátime: $B = \mathtt{biele}$, $P = \mathtt{patrí}$

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e, ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej x jednotlivé prvky domény:

$e(x/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} (B(x) \to P(x, y))\,[e(x/d)]$	
$\{x \mapsto$ Viera, $y \mapsto$ Eva, …$\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$
$\vdots$	$\vdots$	
$\{x \mapsto$, $y \mapsto$ Eva, …$\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$, $y \mapsto$ Eva, …$\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \models P(x, y)\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$, $y \mapsto$ Eva, …$\}$	?	
$\{x \mapsto$, $y \mapsto$ Eva, …$\}$		

$D = \{$ Viera, Juraj, Eva, , , , , $\}$

$i(\mathtt{Vierka}) =$ Viera,

$i(\mathtt{Jurko}) =$ Juraj,

$i(\mathtt{Ňufko}) =$

$i(\mathtt{biele}) = \{$, , $\}$

$i(\mathtt{patrí}) = \{($, Viera$)$, $($, Eva$)\}$

$e = \{x \mapsto$, $y \mapsto$ Eva, …$\}$

Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \forall x(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))\,[e]$ skrátime: $B = \mathtt{biele}$, $P = \mathtt{patrí}$

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e,
   ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej x jednotlivé prvky domény:

$e(x/d)$	$\mathcal{M} \models^{?} (B(x) \to P(x, y))\,[e(x/d)]$	
$\{x \mapsto$ 🧍Viera, $y \mapsto$ 🧍Eva, …$\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$
$\vdots$	$\vdots$	
$\{x \mapsto$ 🐈, $y \mapsto$ 🧍Eva, …$\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🧍Eva, …$\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \models P(x, y)\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$ 🐎, $y \mapsto$ 🧍Eva, …$\}$	$\not\models$	lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \not\models P(x, y)\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$ 🐦, $y \mapsto$ 🧍Eva, …$\}$	$\not\models$	lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \not\models P(x, y)\,[e(x/d)]$

$D = \{$🧍Viera, 🧍Juraj, 🧍Eva, 🐕, 🐈, 🐉, 🐎, 🐦$\}$

$i(\mathtt{Vierka}) =$ 🧍Viera,

$i(\mathtt{Jurko}) =$ 🧍Juraj,

$i(\mathtt{Ňufko}) =$ 🐉

$i(\mathtt{biele}) = \{$🐉, 🐎, 🐦$\}$

$i(\mathtt{patrí}) = \{($🐎, 🧍Viera$)$, $($🐉, 🧍Eva$)\}$

$e = \{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🧍Eva, …$\}$

Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \forall x(\texttt{biele}(x) \to \texttt{patrí}(x, y))\,[e]$ skrátime: $B = \texttt{biele}$, $P = \texttt{patrí}$

1. Vyskúšame **všetky** varianty ohodnotenia e,
   ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej x jednotlivé prvky domény:

$e(x/d)$		$\mathcal{M} \models^{?} (B(x) \to P(x, y))\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$ 🧍$_{\text{Viera}}$, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}, \dots\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$
$\vdots$	$\vdots$	
$\{x \mapsto$ 🐈, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}, \dots\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}, \dots\}$	$\models$	lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \models P(x, y)\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$ 🐎, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}, \dots\}$	$\not\models$	lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \not\models P(x, y)\,[e(x/d)]$
$\{x \mapsto$ 🕊, $y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}, \dots\}$	$\not\models$	lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \not\models P(x, y)\,[e(x/d)]$

2. $\mathcal{M} \models \forall x\,(\texttt{biele}(x) \to \texttt{patrí}(x, y))\,[e]$
   vtt **pre všetky $d \in D$** máme $\mathcal{M} \models (\texttt{biele}(x) \to \texttt{patrí}(x, y))\,[e(x/d)]$.
   Pravá strana je nepravdivá pre $d =$ 🐎 a $d =$ 🕊 — *kontrapríklady*.
   Takže $\mathcal{M} \not\models \forall x\,(\texttt{biele}(x) \to \texttt{patrí}(x, y))\,[e]$.

$D = \{$🧍$_{\text{Viera}}$, 🧍$_{\text{Juraj}}$, 🧍$_{\text{Eva}}$,
🐕, 🐈,
🐉, 🐎, 🕊$\}$

$i(\texttt{Vierka}) =$ 🧍$_{\text{Viera}}$,

$i(\texttt{Jurko}) =$ 🧍$_{\text{Juraj}}$,

$i(\texttt{Ňufko}) =$ 🐉

$i(\texttt{biele}) = \{$🐉,
🐎,
🕊$\}$

$i(\texttt{patrí}) = \{\,($🐎, 🧍$_{\text{Viera}})$,
$($🐉, 🧍$_{\text{Eva}})\,\}$

$e = \{x \mapsto$ 🐉,
$y \mapsto$ 🧍$_{\text{Eva}}, \dots\}$

Splnenie všeobecne kvantifikovanej implikácie

⚠ Naša $\mathcal{M}$ spĺňa implikáciu $(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))$ pri $e(x/d)$ pre väčšinu $d \in D$ preto, že jej antecedent, $\mathtt{biele}(x)$, je nesplnený.

To zodpovedá čítaniu formuly $\forall x(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))$ ako výroku „všetko biele patrí y“:

- Objekty, ktoré nie sú biele, neovplyvňujú pravdivosť tohto výroku ani pravdivosť implikácie $(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))$.
- Výrok aj implikácia sú nepravdivé iba vtedy, keď nejaký biely objekt nepatrí y.

Ak by nič nebolo biele,
teda by $\mathcal{M} \not\models \mathtt{biele}(x)[e(x/d)]$ pre všetky $d \in D$,
tak by aj formula $\forall x(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))$
aj tvrdenie „všetko biele patrí y“
boli triviálne splnené.

Nezávislosť od ohodnotenia viazanej premennej

Pri vyhodnocovaní splnenia kvantifikovanej formuly štruktúrou pri danom ohodnotení e

$$\mathcal{M} \models \exists y\, \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e]$$

$$\mathcal{M} \models \forall x(\mathtt{biele}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))\,[e]$$

nezáleží na tom, akú hodnotu priraďuje pôvodné ohodnotenie e viazanej premennej.

Priamu podformulu kvantifikovanej formuly vyhodnocujeme pri **nových** ohodnoteniach $e(y/d)$, resp. $e(x/d)$, cez všetky $d \in D$.

Nezávislosť od ohodnotenia viazanej premennej

Pri vyhodnocovaní splnenia formuly s jedinou premennou, ktorá je kvantifikovaná, na pôvodnom ohodnotení vôbec nezáleží.

Mohlo by sa preto zdať, že pre prácu s uzavretými formulami je naša definícia zbytočne zložitá.

Ale ak je premenných viac, ohodnotenie už môže ovplyvniť spĺňanie. Napr. pri vyhodnocovaní

$$\mathcal{M} \models \exists x \, \forall y \, \mathtt{patrí}(x, y) [e]$$

najprv zvolíme konkrétneho kandidáta na svedka d pre x a pri následnom vyhodnocovaní

$$\mathcal{M} \models \forall y \, \mathtt{patrí}(x, y) [e(x/d)]$$

hodnotu premennej x používame, ale už ju nijako nevieme ovplyvniť.

Splnenie formuly v štruktúre

Definícia 7.23

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných.
Relácia ***štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa formulu A pri ohodnotení e***
(skrátene $\mathcal{M} \models A[e]$) má nasledovnú induktívnu definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$ vtt $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)[e]$ vtt $\left(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\right) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ a zároveň $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models \exists x A[e]$ vtt pre **nejaký** prvok $d \in D$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/d)]$,
- $\mathcal{M} \models \forall x A[e]$ vtt pre **každý** prvok $d \in D$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/d)]$,

pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n,
všetky termy $t_1, t_2, \dots, t_n$, všetky premenné x a všetky formuly A, B.

Splnenie formuly v štruktúre pri ohodnotení · príklad

Príklad 7.24

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\begin{array}{lll}
i(\texttt{Jurko}) = 1 & i(\texttt{myš}) = \{3, 4\} & i(\texttt{patrí}) = \{(3, 2), \\
i(\texttt{Vierka}) = 2 & i(\texttt{škrečok}) = \{5\} & \qquad (4, 2), \\
i(\texttt{Ňufko}) = 4 & i(\texttt{biele}) = \{4, 5\} & \qquad (5, 1)\}.
\end{array}$$

Nech $e = \{x \mapsto 3, y \mapsto 5, \ldots\}$.

Zistime, či

- $\mathcal{M} \models ((\texttt{myš}(x) \land \texttt{biele}(x)) \to \exists y\, \texttt{patrí}(x, y))\, [e]$
- $\mathcal{M} \models \forall x((\texttt{myš}(x) \land \texttt{biele}(x)) \to \exists y\, \texttt{patrí}(x, y))\, [e]$

Pravdivosť uzavretej formuly a teórie

Neuzavreté formuly zodpovedajú **výrokovým formám**.
Ich splnenie v štruktúre **závisí od ohodnotenia** voľných premenných.

Uzavreté formuly zodpovedajú **výrokom**.
Ich splnenie v štruktúre **nezávisí od ohodnotenia**.
Preto pri nich môžeme hovoriť o **pravdivosti v štruktúre**.

Definícia 7.25

Nech X je **uzavretá** formula jazyka $\mathcal{L}$, nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$.

Formula X je ***pravdivá*** v štruktúre $\mathcal{M}$ (skrátene $\mathcal{M} \models X$) vtt $\mathcal{M}$ spĺňa formulu X pri každom ohodnotení e.
Vtedy tiež hovoríme, že $\mathcal{M}$ je ***modelom*** formuly X.

Teória T je ***pravdivá*** v štruktúre $\mathcal{M}$ (skrátene $\mathcal{M} \models T$) vtt každá formula X z T je pravdivá v $\mathcal{M}$.
Vtedy tiež hovoríme, že $\mathcal{M}$ je ***modelom*** teórie T.

Prvorádová ekvivalentnosť formúl

Na cvičeniach budeme potrebovať pojem ekvivalentnosti formúl v logike prvého rádu.

Definícia 7.26

Nech X a Y sú formuly jazyka $\mathcal{L}$.

Formula X je ***prvorádovo ekvivalentná*** s formulou Y (skr. $X \Leftrightarrow Y$) vtt pre každú štruktúru $\mathcal{M}$ a každé ohodnotenie e máme $\mathcal{M} \models X[e]$ vtt $\mathcal{M} \models Y[e]$.

Dohoda 7.27

Príslovku „prvorádovo“ budeme zvyčajne vynechávať.

Na dokazovanie ekvivalentnosti nemáme zatiaľ pohodlnú metódu, ale na jej vyvrátenie (dokázanie $X \not\Leftrightarrow Y$) stačí nájsť takú štruktúru $\mathcal{M}$ a ohodnotenie e, že…

Kvantifikátory

Neexistencia

Neexistencia — úskalia negácie

Neexistenciu v slovenčine zvyčajne vyjadruje *dvojitý zápor*:
negatívne zámeno (nikto/nič/žiadne) a negatívne tvrdenie, napr.

„**Nič nie** je dokonalé“.

Na jej správne vyjadrenie musíme tvrdenie **parafrázovať** tak, aby sme negáciu vyjadrili **iba** pomocou „**nie je pravda, že**“. Sú dve možnosti:

1. „**Nie je pravda, že** *niečo* je dokonalé.“
   „**Nie je pravda, že** *existuje* taký objekt x, že x je dokonalé.“

Neexistencia — úskalia negácie

Neexistenciu v slovenčine zvyčajne vyjadruje *dvojitý zápor*: negatívne zámeno (nikto/nič/žiadne) a negatívne tvrdenie, napr.

„**Nič nie** je dokonalé“.

Na jej správne vyjadrenie musíme tvrdenie **parafrázovať** tak, aby sme negáciu vyjadrili **iba** pomocou „**nie je pravda, že**“. Sú dve možnosti:

1. „**Nie je pravda, že** *niečo* je dokonalé.“
   „**Nie je pravda, že** *existuje* taký objekt x, že x je dokonalé.“
   - $\neg\exists x\, \texttt{dokonalé}(x)$

Neexistencia — úskalia negácie

Neexistenciu v slovenčine zvyčajne vyjadruje *dvojitý zápor*: negatívne zámeno (nikto/nič/žiadne) a negatívne tvrdenie, napr.

„**Nič nie** je dokonalé“.

Na jej správne vyjadrenie musíme tvrdenie **parafrázovať** tak, aby sme negáciu vyjadrili **iba** pomocou „**nie je pravda, že**“. Sú dve možnosti:

1. „**Nie je pravda, že** *niečo* je dokonalé.“
   „**Nie je pravda, že** *existuje* taký objekt x, že x je dokonalé.“
   - $\neg \exists x\, \mathtt{dokonal\acute{e}}(x)$

   ⚠ Negácia sa vzťahuje na **celú** kvantifikovanú formulu!

Neexistencia — úskalia negácie

Neexistenciu v slovenčine zvyčajne vyjadruje *dvojitý zápor*:
negatívne zámeno (nikto/nič/žiadne) a negatívne tvrdenie, napr.

„Nič nie je dokonalé“.

Na jej správne vyjadrenie musíme tvrdenie parafrázovať tak, aby sme negáciu vyjadrili iba pomocou „nie je pravda, že“. Sú dve možnosti:

1. „Nie je pravda, že *niečo* je dokonalé.“
   „Nie je pravda, že *existuje* taký objekt x, že x je dokonalé.“
   - $\neg \exists x\, \texttt{dokonalé}(x)$
   - ⚠ Negácia sa vzťahuje na celú kvantifikovanú formulu!
2. „*Všetko* je nedokonalé“
   „Pre *každý* objekt x nie je pravda, že x je dokonalé.“

Neexistencia — úskalia negácie

Neexistenciu v slovenčine zvyčajne vyjadruje *dvojitý zápor*:
negatívne zámeno (nikto/nič/žiadne) a negatívne tvrdenie, napr.

„Nič nie je dokonalé“.

Na jej správne vyjadrenie musíme tvrdenie parafrázovať tak, aby sme negáciu vyjadrili iba pomocou „nie je pravda, že“. Sú dve možnosti:

1. „Nie je pravda, že *niečo* je dokonalé.“
   „Nie je pravda, že *existuje* taký objekt x, že x je dokonalé.“
   - $\neg\exists x\, \texttt{dokonalé}(x)$

   ⚠ Negácia sa vzťahuje na celú kvantifikovanú formulu!
2. „*Všetko* je nedokonalé“
   „Pre *každý* objekt x nie je pravda, že x je dokonalé.“
   - $\forall x\, \neg\texttt{dokonalé}(x)$

Neexistencia — úskalia negácie

Neexistenciu v slovenčine zvyčajne vyjadruje *dvojitý zápor*:
negatívne zámeno (nikto/nič/žiadne) a negatívne tvrdenie, napr.

„**Nič nie** je dokonalé“.

Na jej správne vyjadrenie musíme tvrdenie **parafrázovať** tak, aby sme negáciu vyjadrili **iba** pomocou „**nie je pravda, že**“. Sú dve možnosti:

1. „**Nie je pravda, že** *niečo* je dokonalé.“
   „**Nie je pravda, že** *existuje* taký objekt x, že x je dokonalé.“
   - $\neg\exists x\, \texttt{dokonalé}(x)$

   ⚠ Negácia sa vzťahuje na **celú** kvantifikovanú formulu!
2. „*Všetko* je **ne**dokonalé“
   „Pre *každý* objekt x **nie je pravda, že** x je dokonalé.“
   - $\forall x\, \neg\texttt{dokonalé}(x)$

⚠ Pri parafrázovaní **nepoužívajte „neexistuje“** — je **zavádzajúce**!
(Presvedčíme sa o tom na budúci týždeň.)

Kvantifikátory

Aristotelovské formy

Štyri aristotelovské formy

Dávno pred kodifikáciou logiky prvého rádu sa kvantifikovanými tvrdeniami zaoberal staroveký grécky filozof Aristoteles.

Študoval najmä tvrdenia v tvaroch:

- Všetky P sú Q.
- Niektoré P sú Q.
- Žiadne P nie sú Q.
- Niektoré P nie sú Q.

ktorým dnes hovoríme obmedzená alebo ohraničená kvantifikácia.

Matematici ju radi zapisujú skrátene, napr.

$$\forall\epsilon{>}0\,\exists\delta{>}0\,\forall x{\in}\mathbb{R}(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - b| < \epsilon)$$

Logika prvého rádu dokáže tieto formy vyjadriť pomocou základných (neobmedzených) kvantifikátorov a logických spojok.

Všetky P sú Q

Formu „Všetky P sú Q“ (napr. „Všetky myši sú sivé“) formalizujeme

Všetky P sú Q

Formu „Všetky P sú Q“ (napr. „Všetky myši sú sivé“) formalizujeme

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$$

teda „Pre každý objekt x je pravda, že
ak x má vlastnosť P, tak x má vlastnosť Q.“,
ekvivalentne „Pre každý objekt x je pravda, že
x **ne**má vlastnosť P **alebo** x má vlastnosť Q.“

Študenti túto formu niekedy **nesprávne** sformalizujú ako

$$\forall x(P(x) \land Q(x))$$

Pritom táto formalizácia neprejde jednoduchou skúškou —
stačí si ju prečítať:
„**Každý** objekt x má **súčasne** vlastnosť P **aj** vlastnosť Q,“
prirodzenejšie „**Všetko** je P aj Q“ (napr. „Všetko je myš a je to sivé“).

Všetky P sú Q — varianty

Forma „Všetky P sú Q“ sa v prirodzených vetách niekedy rozpoznáva ťažšie, napríklad keď je P alebo Q vzťah:

- Všetky myši kŕmi Jurko.
  Všetky myši sú také, že ich kŕmi Jurko.
  $\forall x(\mathtt{myš}(x) \to \mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x))$
- Jurko kŕmi iba myši.
  Všetko, čo Jurko kŕmi, sú myši.
  $\forall x(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x) \to \mathtt{myš}(x))$.

Niektoré P sú Q

Formu „Niektoré P sú Q“ (napr. „Niektoré myši sú biele“) formalizujeme

Niektoré P sú Q

Formu „Niektoré P sú Q“ (napr. „Niektoré myši sú biele“) formalizujeme

$$\exists x\,(P(x) \land Q(x))$$

teda „Existuje aspoň taký jeden objekt x, že x má vlastnosť P a x má vlastnosť Q.“

Študenti túto formu niekedy nesprávne sformalizujú ako

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

Ani táto formalizácia neprejde čítacou skúškou:
„Existuje objekt x, ktorý ak má vlastnosť P, tak má vlastnosť Q,“ čo je podľa definície splnenia v ohodnotení ekvivalentné s „Existuje objekt x, ktorý ak má vlastnosť P, tak má vlastnosť Q,“ (napr. „Niečo nie je myš alebo je to biele“ — je pravdivé vo svete, kde sú všetky myši sivé a je tam jeden človek).

Niektoré P sú Q — varianty

Forma „Niektoré P sú Q“ sa v prirodzených vetách niekedy rozpoznáva ťažšie, napríklad keď je P alebo Q vzťah.

- Jurko kŕmi nejaké myši.
  Jurko kŕmi (nejakú) myš.
  Niečo z toho, čo Jurko kŕmi, sú myši.
  $\exists x(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x) \land \mathtt{myš}(x))$

Niektorých študentov prekvapuje, že pri tejto forme nezáleží na poradí P a Q.

- Nejaké myši kŕmi Jurko.
  Niektoré myši sú také, že ich kŕmi Jurko.
  $\exists x(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x) \land \mathtt{myš}(x))$

Je ale **vernejšie** poradie pri formalizácii zachovať:
$\exists x(\mathtt{myš}(x) \land \mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x))$

Žiadne P nie sú Q

Formu „Žiadne P nie sú Q" (napr. „Žiadne myši nie sú červené")
formalizujeme parafrázujeme ako

Žiadne P nie sú Q

Formu „Žiadne P nie sú Q“ (napr. „Žiadne myši nie sú červené“) formalizujeme parafrázujeme ako

> „Nie je pravda, že existuje taký objekt x, že
> x má vlastnosť P a x má vlastnosť Q.“

a formalizujeme

Žiadne P nie sú Q

Formu „Žiadne P nie sú Q“ (napr. „Žiadne myši nie sú červené“) formalizujeme parafrázujeme ako

> „Nie je pravda, že existuje taký objekt x, že x má vlastnosť P a x má vlastnosť Q.“

a formalizujeme

$$\neg \exists x (P(x) \land Q(x))$$

alebo parafrázujeme ako

Žiadne P nie sú Q

Formu „Žiadne P nie sú Q“ (napr. „Žiadne myši nie sú červené“) formalizujeme parafrázujeme ako

> „Nie je pravda, že existuje taký objekt x, že
> x má vlastnosť P a x má vlastnosť Q.“

a formalizujeme

$$\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

alebo parafrázujeme ako

> „Pre každý objekt x je pravda, že
> ak x má vlastnosť P, tak x nemá vlastnosť Q,“
> teda „Každé P nie je Q,“

a formalizujeme ako

Žiadne P nie sú Q

Formu „Žiadne P nie sú Q“ (napr. „Žiadne myši nie sú červené“) formalizujeme parafrázujeme ako

> „Nie je pravda, že existuje taký objekt x, že
> x má vlastnosť P a x má vlastnosť Q.“

a formalizujeme

$$\neg \exists x (P(x) \land Q(x))$$ ✓

alebo parafrázujeme ako

> „Pre každý objekt x je pravda, že
> ak x má vlastnosť P, tak x nemá vlastnosť Q,“
> teda „Každé P nie je Q,“

a formalizujeme ako

$$\forall x (P(x) \to \neg Q(x))$$ ✓

Ani pri tejto forme nezáleží na poradí P a Q,
ale je vernejšie ho pri formalizácii zachovať.

Niektoré P nie sú Q

Formu „Niektoré P nie sú Q“ (napr. „Niektoré myši nie sú sivé“) formalizujeme

Niektoré P nie sú Q

Formu „Niektoré P nie sú Q“ (napr. „Niektoré myši nie sú sivé“) formalizujeme

$$\exists x (P(x) \land \neg Q(x))$$

teda „Pre nejaký objekt x je pravda, že
x má vlastnosť P a x nemá vlastnosť Q.“

Kvantifikátory

Zamlčané a zdanlivo opačné kvantifikátory

Zamlčaný všeobecný kvantifikátor

Niekedy kvantifikátor nie je explicitne vyjadrený príslušným zámenom.

Použitie všeobecného podstatného mena (zvyčajne, ale nie nutne v množnom čísle) v úlohe podmetu sa zvyčajne chápe ako všeobecná kvantifikácia:

- Myši sú sivé.
  $\forall x(\texttt{myš}(x) \to \texttt{sivý}(x))$
- Myš je hlodavec.
  $\forall x(\texttt{myš}(x) \to \texttt{hlodavec}(x))$
- Kto prešiel Logiku, ten odovzdával domáce úlohy.
  $\forall x(\texttt{prešiel}(x, \texttt{Logiku}) \to \texttt{odovzdával\_DÚ}(x))$

Zamlčaný existenčný kvantifikátor

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe **predmetu pozitívneho** prísudku sa **zvyčajne** chápe ako **existenčná** kvantifikácia:

- Jurko kŕmi myš.

Zamlčaný existenčný kvantifikátor

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe predmetu pozitívneho prísudku sa zvyčajne chápe ako existenčná kvantifikácia:

- Jurko kŕmi myš.
  $\exists x(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x) \land \mathtt{myš}(x))$
- Bonifác si kúpil syr.
  $\exists x(\mathtt{kúpil}(\mathtt{Bonifác}, x) \land \mathtt{syr}(x))$

Zamlčaná neexistencia

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe **predmetu negatívneho** prísudku sa **zvyčajne** chápe ako vyjadrenie **neexistencie**:

- Bonifác si nekúpil syr.

Zamlčaná neexistencia

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe **predmetu negatívneho** prísudku sa **zvyčajne** chápe ako vyjadrenie **neexistencie**:

- Bonifác si nekúpil syr.
  $\neg\exists x(\mathtt{kúpil}(\mathtt{Bonifác}, x) \land \mathtt{syr}(x))$
  $\forall x(\mathtt{kúpil}(\mathtt{Bonifác}, x) \to \neg\mathtt{syr}(x))$
- Jurko nekŕmi myši.
  $\forall x(\mathtt{myš}(x) \to \neg\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x))$
  $\forall x(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x) \to \neg\mathtt{myš}(x))$
  $\neg\exists x(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x) \land \mathtt{myš}(x))$

Opatrnosti nikdy nie je nazvyš

Ľudia neraz veci kvantifikujú nesprávne alebo neúplne
(zvlášť pozor na ľudí pôsobiacich v inom odvetví, kde nepoznáte konvencie).

Ako interpretovať tvrdenie „chlieb predávajú v potravinách“?

Opatrnosti nikdy nie je nazvyš

Ľudia neraz veci kvantifikujú nesprávne alebo neúplne (zvlášť pozor na ľudí pôsobiacich v inom odvetví, kde nepoznáte konvencie).

Ako interpretovať tvrdenie „chlieb predávajú v potravinách“?

- každý chlieb predávajú len v potravinách a nikde inde
- existuje druh chleba, ktorý predávajú len v miestnej predajni potravín
- existuje druh chleba, ktorý predávajú v každých potravinách
- existujú potraviny, ktoré predávajú aspoň jeden chlieb
- každé potraviny predávajú aspoň jeden chlieb
- …

Zdanlivá existencia

V podmienkach sa občas vyskytujú neurčité zámená (niekto/niečo/niektoré/…), na ktoré sa ale odkazujeme v podmienenej vete:

- Keď **niekto** cvičí, tak je (*on/ona*) zdravý/-á.
- Ak sa Jurko o **niečo** stará, tak to **to** rád.

Také tvrdenie nezodpovedá implikácii s existenčným kvantifikátorom:

❌ $(\exists x\, \mathrm{doma}(x) \rightarrow \mathrm{zodpovedný}(x))$

❌ $\exists x(\mathrm{doma}(x) \rightarrow \mathrm{zodpovedný}(x))$

ale zodpovedá

Zdanlivá existencia

V podmienkach sa občas vyskytujú neurčité zámená (niekto/niečo/niektoré/…), na ktoré sa ale odkazujeme v podmienenej vete:

- Keď **niekto** cvičí, tak je (*on/ona*) zdravý/-á.
- Ak sa Jurko o **niečo** stará, tak to **to** rád.

Také tvrdenie nezodpovedá implikácii s existenčným kvantifikátorom:

✗ $(\exists x\, \mathtt{doma}(x) \to \mathtt{zodpovedný}(x))$

✗ $\exists x(\mathtt{doma}(x) \to \mathtt{zodpovedný}(x))$

ale zodpovedá **všeobecne kvantifikovanej implikácii**:

✓ $\forall x(\mathtt{cvičí}(x) \to \mathtt{zdravý}(x))$

✓ $\forall x(\mathtt{stará\_sa\_o}(\mathtt{Jurko}, x) \to \mathtt{má\_rád}(\mathtt{Jurko}, x))$

Kvantifikátory

Nutné a postačujúce podmienky

Nutné a postačujúce podmienky

Tvrdenia so (zamlčanou) všeobecnou kvantifikáciou majú často formu podraďovacích súvetí:

1. Logiku prejde **každý/-á, kto** odovzdáva domáce úlohy.
2. Logiku prejde **iba tá/ten, kto** odovzdáva domáce úlohy.

pričom

- hlavná veta („Logiku prejde . . . “) vyjadruje nejakú **vlastnosť**,
- vedľajšia veta („kto odovzdáva domáce úlohy“) vyjadruje **podmienku**, ktorá súvisí s touto vlastnosťou.

Aký je rozdiel medzi týmito podmienkami?

Postačujúca podmienka

Výrok „Logiku prejde **každý/-á, kto** odovzdáva domáce úlohy“:

- je nepravdivý, keď existuje niekto, kto odovzdáva domáce úlohy, ale Logiku neprejde;
- teda hovorí, že na to, aby nejaká osoba prešla Logiku, **postačuje**, aby odovzdávala domáce úlohy.
- Odovzdávať domáce úlohy je teda **postačujúcou** podmienkou prejdenia Logiky.
- Inak povedané: Pre každého/-ú platí, že
  - prejde Logiku, ak odovzdáva domáce úlohy;
  - ak odovzdáva domáce úlohy, tak prejde Logiku.
- Formalizácia je teda:

$$\forall x(\mathtt{odovzdáva\_DÚ}(x) \to \mathtt{prejde}(x, \mathtt{Logika}))$$

Nutná podmienka

Výrok „Logiku prejde iba tá/ten, kto odovzdáva domáce úlohy.“:

- je nepravdivý, keď existuje niekto, kto neodovzdáva domáce úlohy, ale Logiku predsa prejde;
- teda hovorí, že na to, aby nejaká osoba prešla Logiku, je nutné, aby odovzdávala domáce úlohy.
- Odovzdávať domáce úlohy je teda nutnou podmienkou prejdenia Logiky.
- Ekvivalentne: Pre každého/-u platí, že
  - prejde Logiku, iba ak odovzdáva domáce úlohy.
  - ak neodovzdáva domáce úlohy, tak neprejde Logiku.
  - ak prejde Logiku, tak odovzdáva domáce úlohy.
- Formalizácia je teda:

$$\forall x(\mathtt{prejde}(x, \mathtt{Logika}) \to \mathtt{odovzdáva\_DÚ}(x))$$

Kvantifikátory

Zložené kvantifikované vlastnosti

Zložené kvantifikované vlastnosti

Často potrebujeme kvantifikovať objekty, ktoré majú zložité vlastnosti:

1. Nejaká Jankina biela myš je sýta.
2. Všetky Jankine biele myši sú sýte.

Prvý druh kvantifikácií je zrejme existenčný a už vieme, že sa spravidla spája s konjunkciou.

Druhý druh kvantifikácií je zrejme všeobecný a vieme, že sa spravidla spája s implikáciou.

Použitie spojok ale závisí od pozície kvantifikácie vo vete.

Zložené existenčne kvantifikované vlastnosti ako podmet

Nejaká Jankina biela myš je sýta.

- Výrok má formu „Niektoré P sú Q,“
  teda prekladáme ho ako $\exists x(P(x) \land Q(x))$.
  Pričom ale P **je zložená** vlastnosť.
- Vlastnosť P opisuje objekt,
  ktorý má zrejme byť súčasne Jankin, biely a má to byť myš.
  Preto P vytvoríme z jednotlivých predikátov konjunkciou.

$$\exists x\big((\mathtt{patrí}(x, \mathtt{Janka}) \land \mathtt{biely}(x) \land \mathtt{myš}(x)) \land \mathtt{sýty}(x)\big)$$

Zložené všeobecne kvantifikované vlastnosti ako podmet

Všetky Jankine biele myši sú sýte.

- Výrok má formu „Všetky P sú Q,“
  teda prekladáme ho ako $\forall x(P(x) \to Q(x))$,
  pričom P **je zložená** vlastnosť.
- Vlastnosť P opäť opisuje objekty,
  ktoré majú byť súčasne Jankine, biele a myši.
  Preto aj teraz P vytvoríme konjunkciou.

$$\forall x\big((\texttt{patrí}(x, \texttt{Janka}) \land \texttt{biely}(x) \land \texttt{myš}(x)) \to \texttt{sýty}(x)\big)$$

Zložené existenčne kvantifikované vlastnosti ako predmet

Jurko má nejakú sýtu bielu myš.

- Aby sme zistili, ktorú aristotelovskú formu má veta, musíme ju preformulovať:
  Nejaká sýta biela myš patrí Jurkovi.
- Veta má formu „Niektoré P sú Q,“
  teda prekladáme ju ako $\exists x(P(x) \land Q(x))$,
  pričom P je zložená vlastnosť.

$$\exists x\big((\mathtt{sýty}(x) \land \mathtt{myš}(x) \land \mathtt{biely}(x)) \land \mathtt{patrí}(x, \mathtt{Jurko})\big)$$

Zložené všeobecne kvantifikované vlastnosti ako predmet

Jurko má všetky sýte biele myši.

- Aj túto vetu musíme preformulovať:
  Všetky sýte biele myši sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky P sú Q,“
  teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
  pričom P je zložená vlastnosť.

$$\forall x\big((\mathtt{sýty}(x) \land \mathtt{myš}(x) \land \mathtt{biely}(x)) \to \mathtt{patrí}(x, \mathtt{Jurko})\big)$$

Viacnásobné všeobecne kvantifikované prívlastky

Jurko má všetky myši a škrečky.

- Preformulujeme: Všetky myši a škrečky sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky P sú Q,“
  teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
- P je zložená vlastnosť. Ale ako je zložená?

Viacnásobné všeobecne kvantifikované prívlastky

Jurko má všetky myši a škrečky.

- Preformulujeme: Všetky myši a škrečky sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky P sú Q,“
  teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
- P je zložená vlastnosť. Ale ako je zložená?
- Keď „myši a škrečky“ sformalizujeme $(\texttt{myš}(x) \land \texttt{škrečok}(x))$,
  $\forall x(P(x) \to Q(x))$ bude znamenať „Pre každé x,
  ak x je myš a zároveň x je škrečok, tak x patrí Jurkovi.“
- Vieme ale, že nič nie je naraz myš aj škrečok,
  takže podmienke (v našom svete) nevyhovuje žiaden objekt,
  takže Jurkovi nemusí nič patriť.

Viacnásobné všeobecne kvantifikované prívlastky

Jurko má všetky myši a škrečky.

- Preformulujeme: Všetky myši a škrečky sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky P sú Q,“
  teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
- P je zložená vlastnosť. Ale ako je zložená?

❌ Keď „myši a škrečky“ sformalizujeme $(\mathtt{myš}(x) \land \mathtt{škrečok}(x))$,
$\forall x(P(x) \to Q(x))$ bude znamenať „Pre každé x,
ak x je myš a zároveň x je škrečok, tak x patrí Jurkovi.“

- Vieme ale, že nič nie je naraz myš aj škrečok,
  takže podmienke (v našom svete) nevyhovuje žiaden objekt,
  takže Jurkovi nemusí nič patriť.

✅ Intuitívny význam („a“ ako množinové zjednotenie) zachováme,
keď „myši a škrečky“ sformalizujeme

Viacnásobné všeobecne kvantifikované prívlastky

Jurko má všetky myši a škrečky.

- Preformulujeme: Všetky myši a škrečky sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky P sú Q,“
  teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
- P je zložená vlastnosť. Ale ako je zložená?

✗ Keď „myši a škrečky“ sformalizujeme $(\texttt{myš}(x) \land \texttt{škrečok}(x))$,
$\forall x(P(x) \to Q(x))$ bude znamenať „Pre každé x,
ak x je myš a zároveň x je škrečok, tak x patrí Jurkovi.“

- Vieme ale, že nič nie je naraz myš aj škrečok,
  takže podmienke (v našom svete) nevyhovuje žiaden objekt,
  takže Jurkovi nemusí nič patriť.

✓ Intuitívny význam („a“ ako množinové zjednotenie) zachováme,
keď „myši a škrečky“ sformalizujeme $(\texttt{myš}(x) \lor \texttt{škrečok}(x))$.

$$\forall x\big((\texttt{myš}(x) \lor \texttt{škrečok}(x)) \to \texttt{patrí}(x, \texttt{Jurko})\big)$$

Kvantifikátory

Konverzačné implikatúry

Triviálne pravdivé všeobecne kvantifikované implikácie

Nie všetkým sa zdá intuitívne, že formula

$$\forall x(\mathtt{myš}(x) \to \mathtt{biela}(x))$$

je **pravdivá** vo svetoch, kde **nie sú žiadne myši**.

Dobrý spôsob, ako to pochopiť je, že uvedomiť si, že vo svete, kde nie sú myši, **neexistuje kontrapríklad** pre túto formulu — myš, ktorá by nebola biela.

Hovoríme, že v takom svete je táto formula **triviálne pravdivá**.

Podobne je vo svetoch bez myší triviálne pravdivá ešte prekvapujúcejšia formula:

$$\forall x(\mathtt{myš}(x) \to \mathtt{človek}(x))$$

Triviálne pravdivé všeobecne kvantifikované implikácie

Tvrdenie „Každý prvák, ktorý si zapísal logiku, z nej dostal A,“ v sebe nesie implikatúru (domnelý dôsledok), že takí prváci existujú.

Ak je takéto tvrdenie nutne triviálne pravdivé, lebo objekty z predpokladu neexistujú (napr. prváci si logiku nemôžu zapisovať), intuitívne ho považujeme zavádzajúce.

Nič to ale nemení na fakte, že je pravdivé.

Existencia prváka, ktorý si zapísal logiku, je skutočne iba implikatúra.

Dodatok „Ale žiadny prvák si ju nikdy nezapísal“ (negácia implikatúry), nie je s tvrdením v spore, ale objasňuje, že je triviálne pravdivé.

„Niektoré“ neimplikuje „nie všetky“

Ďalšia implikatúra sa spája s tvrdeniami: „Niektoré P sú Q.“

Niekomu sa môže „Niektoré P sú Q“ zdať sporné s „Všetky P sú Q.“
— Prečo by sme hovorili „niektoré P“, keď to platí pre všetky P?
Takýto človek považuje tvrdenie „Nie všetky P sú Q“ za dôsledok tvrdenia „Niektoré P sú Q“. Aj to je však iba implikatúra.

Keď ale na otázku „Dostal niekto Ačko?“ odpovieme
„Áno, niektorí študenti Ačko dostali. *Vlastne ho dostali všetci*,“
druhá veta prvú dopĺňa, ale neprotirečí jej,
hoci je negáciou implikatúry.

Ak chceme jasne vyjadriť domnelý význam, povieme
„Niektorí študenti Ačko dostali, ale nie všetci,“ čo formalizujeme
formulou v tvare $(\exists x(P(x) \land Q(x)) \land \neg \forall x(P(x) \to Q(x)))$.

Kvantifikátory

Vyhýbanie sa chybám

Bežné chyby

Ďalšie bežné chyby:

- použitie predikátu v rovnostnom atóme
  (na niektorej strane rovnosti miesto termu)
- reťazenie predikátov (jeden je argumentom druhého)
- nepoužitie potrebného predikátu
- voľná premenná vo formule
- zámena ekvivalencie a implikácie

Kontrola

Techniky na kontrolu:

- Prejdem si zoznam funkčných aj predikátových symbolov, vylúčim tie, čo nesúvisia s daným tvrdením, a overím, že všetky ostatné sú vo formule obsiahnuté.
- Mechanicky prepíšem zapísanú formulu (napr. použitím de Morganových pravidiel, presunutím negácie dovnútra kvantifikátora či von, odstránením implikácií); prečítam si a pochopím upravenú formulu — hovorí to, čo má?

Kontrola

- Zapíšem to isté iným spôsobom (nie vždy mi nejaký napadne ľahko, ale vždy viem zapísať opak, čiže negáciu, napr. úvahou cez protipríklad — či už pre celú formulu, alebo pre jej časť).
  - Potom mechanicky upravujem dve formuly na ekvivalentné a snažím sa ich previesť do tvaru, kde už je jasné, či sú rovnaké alebo rôzne (napr. do negačnej normálnej formy).
  - Alebo prečítam alternatívny zápis, preložím si ho do prirodzeného jazyka a porovnám, či sa zhoduje s pôvodným.
- Overím, či niekde nemám zápis $\forall x(P(x) \land \dots)$ — takmer nikdy nechcete povedať niečo typu: „Všetky objekty sú počítače."
- Overím, či niekde nemám zápis $\exists x(P(x) \to Q(x))$ — takmer nikdy nechcete povedať niečo typu: „Existuje objekt, ktorý nie je počítač alebo je pokazený."