

# Tablá pre kvantifikátory.

## Viackvantifikátorové tvrdenia

8. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

---

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2023/2024

Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## Obsah 8. prednášky

---

### Tablá s kvantifikátormi

Logické vlastnosti a vzťahy  
v logike prvého rádu

Dokazovanie s kvantifikátormi

Substitúcia a substituovateľnosť

### Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

Rovnaký kvantifikátor

Alternácia kvantifikátorov

Postupná formalizácia a parafrázovanie

Závislosť od kontextu

Dodatky k formalizácii s jedným kvantifikátorom

## Tablá s kvantifikátormi

---

## Tablá s kvantifikátormi

---

Logické vlastnosti a vztáhy  
v logice prvního rádu

## Logické vlastnosti a vzťahy v logike prvého rádu

Minulý týždeň sme zdefinovali,  
kedy je **uzavretá** formula a teória (množina uzavretých formúl)  
**pravdivá** v danej štruktúre ( $\mathcal{M} \models A$ ,  $\mathcal{M} \models T$ ).

Použili sme pomocný induktívne definovaný vzťah  
štruktúra **spĺňa** formulu pri ohodnotení ( $\mathcal{M} \models X[e]$ ).  
Je definovaný pre **všetky** formuly (otvorené aj uzavreté).

Pomocou štruktúr a pravdivosti môžeme pre relačnú logiku prvého  
rádu skonkretizovať **logické vlastnosti a vzťahy**, ktoré už poznáme  
z výrokovologickej časti logiky prvého rádu:

- splniteľnosť a nespľniteľnosť,
- „vždy pravdivé“ formuly  
(vo výrokovom prípade sa volali tautológie),
- vyplývanie/logický dôsledok.

# Splniteľnosť a nespĺniteľnosť

Ako sme sa dohodli minule, predpokladáme, že sme si pevne zvolili ľubovoľný jazyk relačnej logiky prvého rádu  $\mathcal{L}$ . Všetky definície platia pre symboly, termy, atómy, formuly, teórie, atď. v tomto jazyku a štruktúry a ohodnotenia individuových premenných pre tento jazyk. Pretože  $\mathcal{L}$  je ľubovoľný, dajú sa definície aplikovať na všetky jazyky relačnej logiky prvého rádu.

## Definícia 8.1

Nech  $X$  je uzavretá formula a  $T$  je teória.

Formula  $X$  je **prvorádovo splniteľná** vtt  $X$  je pravdivá v **nejakej** štruktúre (ekvivalentne: **existuje** štruktúra  $\mathcal{M}$  taká, že  $\mathcal{M} \models X$ ).

Teória  $T$  je **prvorádovo splniteľná** vtt  $T$  má model (ekvivalentne:  $T$  je pravdivá v **nejakej** štruktúre; **existuje** štruktúra  $\mathcal{M}$  taká, že  $\mathcal{M} \models T$ ).

Formula resp. teória je **prvorádovo nespĺniteľná** vtt nie je prvorádovo splniteľná.

### Príklad 8.2

Teória  $\{\forall x(\text{človek}(x) \vee \text{myš}(x)), \forall x(\text{človek}(x) \rightarrow \neg \text{myš}(x))\}$   
je prvorádovo **splniteľná**.

Je to tak preto, že je **pravdivá v štruktúre** (teda jej modelom je)  
 $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde  $D = \{1, 2\}$ ,  $i(\text{človek}) = \{1\}$  a  $i(\text{myš}) = \{2\}$ .

Samozrejme je pravdivá v mnohých iných štruktúrach.

# Platné formuly

Formulám, ktoré sú výrokovologicky pravdivé (pravdivé v každom výrokovologickom ohodnotení atómov), sme hovorili tautológie.

Pre formuly, ktoré sú prvorádovo pravdivé (pravdivé v každej štruktúre), sa používa iný pojem:

## Definícia 8.3

Nech  $X$  je uzavretá formula.

Formula  $X$  je **platná** (skrátene  $\models X$ ) vtt  $X$  je pravdivá v **každej** štruktúre (teda pre **každú** štruktúru  $\mathcal{M}$  máme  $\mathcal{M} \models X$ ).

Samozrejme,

formula **nie je platná** vtt je nepravdivá **v aspoň jednej** štruktúre.

Platnosť sa ale **nedá overiť vymenovaním** všetkých štruktúr, lebo tých je nekonečne veľa.

Je formula  
 $(\forall x \text{ doma}(x) \rightarrow \text{doma}(\text{Jurko}))$   
platná?



### Príklad 8.4

Formula  $X = (\forall x \text{ doma}(x) \rightarrow \text{doma}(\text{Jurko}))$  je platná.

*Dôkaz.* Predpokladajme, že by  $X$  nebola platná, teda by bola nepravdivá v nejakej štruktúre  $\mathcal{M} = (D, i)$ . Potom by v  $\mathcal{M}$  pri nejakom ohodnotení splnený antecedent  $\forall x \text{ doma}(x)$ , ale nesplnený konzekvent  $\text{doma}(\text{Jurko})$ , teda  $i(\text{Jurko}) \notin i(\text{doma})$ .

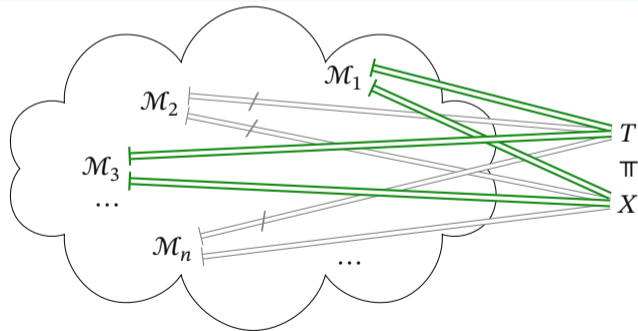
Ak je ale splnené  $\forall x \text{ doma}(x)$ , tak pre každé  $m \in D$  máme  $m \in i(\text{doma})$ . Preto aj  $i(\text{Jurko}) \in i(\text{doma})$ , čo je spor.

Preto  $X$  je platná.

# Prvorádové vyplývanie, prvorádový logický dôsledok

## Definícia 8.5

Z teórie  $T$  *prvorádovo logicky vyplýva* uzavretá formula  $X$  (tiež  $X$  je *prvorádovým logickým dôsledkom*  $T$ , skrátene  $T \models X$ ) vtt  $X$  je pravdivá v každom modeli  $T$  (ekvivalentne podrobnejšie: pre každú štruktúru  $\mathcal{M}$  platí, že ak je v  $\mathcal{M}$  pravdivá  $T$ , tak je v  $\mathcal{M}$  pravdivá  $X$ ).



Nezabúdajme, že význam „ $\models$ “ závisí od *typu* objektu na *ľavej* strane (a od prítomnosti ohodnotenia indiv. premenných):

**pravdivosť:**

štruktúra  $\models$  formula/teória

**spĺnenie:**

štruktúra  $\models$

formula [ohodnotenie]

**vyplývanie:**

teória  $\models$  formula

Prvorádové vyplývanie sa **nedá overiť vymenovaním** všetkých štruktúr, rovnako ako platnosť.

### Príklad 8.6

Vyplyva prvorádovo z teórie

$$T = \{ \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)), \\ \neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}) \}$$

formula  $X = \neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$ ?

Prvorádové vyplývanie sa **nedá overiť vymenovaním** všetkých štruktúr, rovnako ako platnosť.

### Príklad 8.6

Vyplyva prvorádovo z teórie

$$T = \{ \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)), \\ \neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}) \}$$

formula  $X = \neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$ ?

Áno, vyplýva. Presvedčíme sa o tom podobnou úvahou ako v príklade platnej formuly.

## Prvorádové nevyplývanie a príklad

Samozrejme, formula  $X$  **nevyplýva** z teórie  $T$  vtt  
 $X$  nie je pravdivá v **aspoň jednom** modeli  $T$ .  
Tento model je **kontrapríkladom** vyplývania.

### Príklad 8.7

Vyplýva prvorádovo z teórie

$$T = \{ \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)), \\ \text{tlačiareň}(\text{mojaHP}) \}$$

formula  $X = \text{opraví}(\text{TServis}, \text{mojaHP})$ ?

## Prvorádové nevyplývanie a príklad

Samozrejme, formula  $X$  **nevyplýva** z teórie  $T$  vtt  $X$  nie je pravdivá v **aspoň jednom** modeli  $T$ .  
Tento model je **kontrapríkladom** vyplývania.

### Príklad 8.7

Vyplyva prvorádovo z teórie

$$T = \{ \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)), \\ \text{tlačiareň}(\text{mojaHP}) \}$$

formula  $X = \text{opraví}(\text{TServis}, \text{mojaHP})$ ?

Nie, nevyplýva. Napríklad štruktúra  $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde  $D = \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned} i(\text{TServis}) &= 1, & i(\text{tlačiareň}) &= \{2, 3\}, \\ i(\text{mojaHP}) &= 2, & i(\text{opraví}) &= \{(1, 3)\} \end{aligned}$$

je kontrapríkladom toho, že  $T \models X$ , pretože  $\mathcal{M} \models T$ , ale  $\mathcal{M} \not\models X$ .

## Výrokovologické, prvorádové a logické vyplývanie

Podobne ako výrokovologické vyplývanie, aj prvorádové vyplývanie je **špeciálny prípad** logického vyplývania v prirodzenom jazyku.

Logické vyplývanie v prirodzenom jazyku je **bohatšie** ako prvorádové vyplývanie. Tvrdenie zodpovedajúce formule  $X$  logicky vyplýva z tvrdení v  $T$  — keď rozumieme vzťahu „väčší“.

Logika prvého rádu ale „nevidí“ význam predikátov.

Pozera sa na ne len pomocou formúl, v ktorých vystupujú.

### Dohoda 8.8

Nateraz budeme **stručne ale nepresne** hovoriť

„logický dôsledok“ a „vyplývanie“ namiesto

„prvorádový logický dôsledok“ a „prvorádové logické vyplývanie“.

Viac o vzťahu výrokovologického, prvorádového a logického vyplývania neskôr.

## Platnosť a vyplývanie

Medzi platnými formulami a prvorádovým vyplývaním je podobný vzťah ako medzi tautológiami a výrokovologickým vyplývaním.

### Tvrdenie 8.9

*Nech  $X$  je uzavretá formula.*

*Nasledujúce tvrdenia sú vzájomne ekvivalentné:*

- $X$  je platná ( $\models X$ );
- $X$  vyplýva z prázdnej teórie ( $\emptyset \models X$ );
- $X$  vyplýva z každej teórie (pre každú teóriu  $T$  máme  $T \models X$ ).

### Tvrdenie 8.10

*Nech  $T = \{A_1, \dots, A_n\}$  je konečná teória a nech  $X$  je uzavretá formula.*

*Nasledujúce tvrdenia sú vzájomne ekvivalentné:*

- formula  $(\bigwedge_{i=1}^n A_i \rightarrow X)$  je platná (t.j.,  $\models (\bigwedge_{i=1}^n A_i \rightarrow X)$ );
- $X$  vyplýva z teórie  $T$  (t.j.,  $T \models X$ ).



## Tvrdenie 8.11

*Nech  $X$  a  $Y$  sú uzavreté formuly.*

*Nasledujúce tvrdenia sú vzájomne ekvivalentné:*

- *$X$  je prvorádovo ekvivalentná s  $Y$  (skr.  $X \Leftrightarrow Y$ );*
- *formula  $(X \leftrightarrow Y)$  je platná (skr.  $\models (X \leftrightarrow Y)$ );*
- *z  $\{X\}$  prvorádovo vyplýva  $Y$  a z  $\{Y\}$  prvorádovo vyplýva  $X$  (skr.  $\{X\} \models Y$  a  $\{Y\} \models X$ ).*

## Tablá s kvantifikátormi

---

Dokazovanie s kvantifikátormi

## Dôkazy a tablá pre logiku prvého rádu

---

Dôkazy s kvantifikovanými formulami sformalizujeme pomocou rozšírenia tabiel na logiku prvého rádu.

Tablá budú obsahovať označené formuly prvého rádu.

V tabľách dovoľíme aj **otvorené** formuly.

Tablové pravidlá budú zachovávať splniteľnosť tabla.

## Označené formuly logiky prvého rádu

Podobne ako vo výrokovej logike môžeme zaviesť označovanie formúl logiky prvého rádu znamienkami **T** a **F**.

### Definícia 8.12

Nech  $\mathcal{M}$  je štruktúra,  $e$  je ohodnotenie individuových premenných a  $X$  je formula. Potom

- $\mathcal{M}$  *spĺňa označenú formulu **T**  $X$*  pri ohodnotení  $e$  vtt  $\mathcal{M}$  spĺňa formulu  $X$  pri ohodnotení  $e$ ,  
skrátene:  $\mathcal{M} \models \mathbf{T} X[e]$  vtt  $\mathcal{M} \models X[e]$ ;
- $\mathcal{M}$  *spĺňa označenú formulu **F**  $X$*  pri ohodnotení  $e$  vtt  $\mathcal{M}$  *nespĺňa* formulu  $X$  pri ohodnotení  $e$ ,  
skrátene:  $\mathcal{M} \models \mathbf{F} X[e]$  vtt  $\mathcal{M} \not\models X[e]$ .

$\mathcal{M}$  *spĺňa množinu označených formúl  $S^+$*  pri ohodnotení  $e$  vtt  $\mathcal{M}$  spĺňa *každú* označenú formulu  $A^+$  z  $S^+$  pri ohodnotení  $e$ ,  
skrátene:  $\mathcal{M} \models S^+[e]$  vtt pre každú  $A^+ \in S^+$  máme  $\mathcal{M} \models A^+[e]$ .

### Definícia 8.13 (Splniteľnosť označených formúl a ich množín)

Ozn. formula  $X^+$  je *splniteľná* vtt  
pre nejakú štruktúru  $\mathcal{M}$  a nejaké ohodnotenie individuových  
premenných  $e$  máme  $\mathcal{M} \vDash X^+[e]$ .

Množina ozn. formúl  $S^+$  je *splniteľná* vtt  
pre nejakú štruktúru  $\mathcal{M}$  a nejaké ohodnotenie individuových  
premenných  $e$  máme  $\mathcal{M} \vDash S^+[e]$ .

### Príklad 8.14 (Dôkaz s pozitívnou všeobecnou kvantifikáciou)

Dokážme neformálne, ale *veľmi podrobne*, že z teórie  $T = \{$

(1)  $\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

(2)  $\neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$

$\}$  prvorádovo vyplýva (3)  $\neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$ .

*Sporom:*

### Príklad 8.14 (Dôkaz s pozitívnou všeobecnou kvantifikáciou)

Dokážme neformálne, ale *veľmi podrobne*, že z teórie  $T = \{$

(1)  $\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

(2)  $\neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$

$\}$  prvorádovo vyplýva (3)  $\neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$ .

*Sporom:* Nech sú formuly (1) a (2) pravdivé v nejakej štruktúre  $\mathcal{M} = (D, i)$ , ale (3) je v nej nepravdivá, teda nie je splnená pri nejakom ohodnotení  $e$ .

Potom (4)  $\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$  je splnená v  $\mathcal{M}$  pri  $e$ .

Navyše (5)  $\text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$  je nesplnená.

Pretože podľa prvého predpokladu (1) je formula

$(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x))$  splnená pri  $e(x/d)$  pre

každé  $d \in D$ , musí byť splnená aj pre objekt  $i(\text{môjMobil})$ . Teda

**(6)  $(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \rightarrow \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$  je splnená pri  $e$ .**

Pretože už vieme, že ľavá strana je pravdivá (4), musí byť aj pravá strana

(7)  $\text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$  pravdivá. To je ale v spore so skorším

zistením (5), že táto formula je nepravdivá. □

## Tablo pre dôkaz

---

Na väčšinu krokov v predchádzajúcom dôkaze stačia doterajšie tablové pravidlá.

- |   |            |
|---|------------|
| 1. $\mathbf{T} \forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x))$                   | $S^+$      |
| 2. $\mathbf{T} \neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$  | $S^+$      |
| 3. $\mathbf{F} \neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$   | $S^+$      |
| 4. $\mathbf{T} \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$  | $\alpha_3$ |
| 5. $\mathbf{F} \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$   | $\alpha_2$ |
| 6. $\mathbf{T}(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \rightarrow \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$ | ?1         |
| 7. $\mathbf{T} \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$   | MP4, 6     |
- \* 5, 7



## Špeciálny prípad pravdivej všeobecne kvantifikovanej formuly

Doterajšie pravidlá ale nestačia na kľúčový krok, v ktorom sme z **pravdivej všeobecne kvantifikovanej** formuly (1)

$$\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x))$$

odvodili jej špeciálny prípad (**inštanciu**) (6) pre konštantu môjMobil:

$$(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \rightarrow \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$$

Táto formula, ale aj každá iná, ktorá vznikne analogicky dosadením hocijakého termu za premennú  $x$ , je logickým dôsledkom formuly (1).

## Pravidlo pre pravdivé všeobecne kvantifikované formuly

Na tento krok potrebujeme nové pravidlo:

$$\frac{\mathbf{T} \forall x A}{\mathbf{T} A\{x \mapsto t\}} \gamma$$

pre každú formulu  $A$ , každú premennú  $x$  a každý **term**  $t$ ,

**ak** spĺňajú dôležitú dodatočnú podmienku – viac o nej neskôr.

$\{x \mapsto t\}$  označuje **substitúciu** – zobrazenie premenných na termy

(v tomto prípade je toto zobrazenie iba jednoprvkové).

$A\{x \mapsto t\}$  označuje **aplikáciu** substitúcie  $\{x \mapsto t\}$  na formulu  $A$  –

je to formula, ktorá vznikne z formuly  $A$  nahradením **všetkých voľných výskytov** premennej  $x$  termom  $t$ .

## Špeciálny prípad nepravdivej existenčne kvantifikovanej formuly

Veľmi podobná situácia nastáva pre **nepravdivú existenčne kvantifikovanú formulu**, napr.

$$\mathbf{F} \exists x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \wedge \text{mobil}(x)).$$

Inštancia

$$\mathbf{F}(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{Chrumko}) \wedge \text{mobil}(\text{Chrumko}))$$

je logickým dôsledkom pôvodnej označenej formuly.

Rovnako je jej logickým dôsledkom každá iná inštancia a môžeme sformulovať pravidlo:

$$\frac{\mathbf{F} \exists x A}{\mathbf{F} A\{x \mapsto t\}} \gamma$$

pre každú formulu  $A$ , každú premennú  $x$  a každý **term**  $t$ ,  
**ak** (opäť) spĺňajú dôležitú dodatočnú podmienku.

## Dôkaz s **T** $\forall x A$ a **F** $\exists x A$

Pomocou nových pravidiel môžeme dokázať napr.

$\{\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

$\forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(x)),$

$\text{mobil}(\text{môjMobil})\} \models \exists x(\text{mobil}(x) \wedge \neg \text{opraví}(\text{TServis}, x)):$

- |  |   |
|--|---|
| 1. <b>T</b> $\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x))$                    | $S^+$                                   |
| 2. <b>T</b> $\forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(x))$                                | $S^+$                                   |
| 3. <b>T</b> $\text{mobil}(\text{môjMobil})$  | $S^+$                                   |
| 4. <b>F</b> $\exists x(\text{mobil}(x) \wedge \neg \text{opraví}(\text{TServis}, x))$                        | $S^+$                                   |
| 5. <b>T</b> $(\text{mobil}(\text{môjMobil}) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$             | $\gamma 2\{x \mapsto \text{môjMobil}\}$ |
| 6. <b>T</b> $\neg \text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$   | MP5, 3                                  |
| 7. <b>F</b> $\text{tlačiareň}(\text{môjMobil})$  | $\alpha 6$                              |
| 8. <b>T</b> $(\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \rightarrow \text{tlačiareň}(\text{môjMobil}))$ | $\gamma 1\{x \mapsto \text{môjMobil}\}$ |
| 9. <b>F</b> $\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil})$   | MT8, 7                                  |
| 10. <b>F</b> $(\text{mobil}(\text{môjMobil}) \wedge \neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}))$    | $\gamma 4\{x \mapsto \text{môjMobil}\}$ |

---

11. **F**  $\text{mobil}(\text{môjMobil}) \beta 10$

\* 3, 11

12. **F**  $\neg \text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \beta 10$

13. **T**  $\text{opraví}(\text{TServis}, \text{môjMobil}) \alpha 12$

\* 9, 13

## Dôkaz s pozitívnou existenčnou kvantifikáciou

### Príklad 8.15

Dokážme neformálne, že z teórie  $T = \{$

(1)  $\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

(2)  $\exists x \neg \text{tlačiareň}(x)$

$\}$  prvorádovo vyplýva (3)  $\exists x \neg \text{opraví}(\text{TServis}, x).$

*Sporom:* Nech sú formuly (1) a (2) pravdivé v nejakej štruktúre  $\mathcal{M} = (D, i)$ , ale (3) je v nej nepravdivá, teda nie je splnená pri nejakom ohodnotení  $e$ .

# Dôkaz s pozitívnou existenčnou kvantifikáciou

## Príklad 8.15

Dokážme neformálne, že z teórie  $T = \{$

(1)  $\forall x(\text{opraví}(\text{TServis}, x) \rightarrow \text{tlačiareň}(x)),$

(2)  $\exists x \neg \text{tlačiareň}(x)$

$\}$  prvorádovo vyplýva (3)  $\exists x \neg \text{opraví}(\text{TServis}, x).$

*Sporom:* Nech sú formuly (1) a (2) pravdivé v nejakej štruktúre  $\mathcal{M} = (D, i)$ , ale (3) je v nej nepravdivá, teda nie je splnená pri nejakom ohodnotení  $e$ .

Podľa (2) existuje v doméne objekt  $d$  taký, že  $\neg \text{tlačiareň}(x)$  je splnená pri ohodnotení  $e(x/d)$ . **Zoberme si jeden z takýchto objektov a označme ho napríklad premennou  $z$ .** Pri  $e(z/d)$  potom je (4)  $\neg \text{tlačiareň}(z)$  splnená, a teda (5)  $\text{tlačiareň}(z)$  je nespĺnená. Podľa (1) je formula (6)  $(\text{opraví}(\text{TServis}, z) \rightarrow \text{tlačiareň}(z))$  splnená. Pretože už vieme, že pravá strana je nespĺnená (5), je aj ľavá strana (7)  $\text{opraví}(\text{TServis}, z)$  nespĺnená. Podľa predpokladu dôkazu sporom (3) je však aj jeho inštancia (8)  $\neg \text{opraví}(\text{TServis}, z)$  nespĺnená, teda (9) je splnená  $\text{opraví}(\text{TServis}, z)$ , čo je v spore so skorším zistením (7). □

## Pozitívna existenčná kvantifikácia a jej vlastná premenná

Kľúčovým krokom v predchádzajúcom dôkaze je označenie objektu (**svedka**), ktorý existuje podľa **pozitívnej existenčne** kvantifikovanej formuly

$$\mathbf{T} \exists x \neg \text{tlačiareň}(x),$$

**dočasným menom** — voľnou premennou  $z$  a odvodenie:

$$\mathbf{T} \neg \text{tlačiareň}(z).$$

⚠ Táto premenná sa **predtým na vetve nesmie vyskytovať voľná**. ⚠

Musí to byť **nová, vlastná** premenná pre formulu  $\mathbf{T} \exists x \neg \text{tlačiareň}(x)$ .

Vo všeobecnosti:

$$\frac{\mathbf{T} \exists x A}{\mathbf{T} A\{x \mapsto y\}} \delta$$

pre každú formulu  $A$ , každú premennú  $x$  a každú **novú premennú**  $y$ , **ak** (opäť) spĺňajú dôležitú dodatočnú podmienku.

## Prečo vlastná premenná?

---

Prečo potrebuje každá pozitívna existenčná formula vlastnú premennú?

Pravidlá **musia zachovávať splniteľnosť** vetiev v table.

Konštanty a iné voľné premenné v table môžu označovať objekty s konfliktnými vlastnosťami.

Ich dosadením za existenčne kvantifikovanú premennú by sme dospieť k **falošnému** sporu.



## Prečo vlastná premenná? — príklad

Vetva

n+1.  $\mathbf{T}$  tlačiareň( $x$ )

n+2.  $\mathbf{T} \exists x \neg$  tlačiareň( $x$ )

je **splniteľná** (napr. je splnená štruktúrou  $\mathcal{M} = (\{1, 2\}, i)$ ,  $i(\text{tlačiareň}) = \{1\}$  pri ohodnotení  $e = \{x \mapsto 1, \dots\}$ ).

Vetva

n+1.  $\mathbf{T}$  tlačiareň( $x$ )

n+2.  $\mathbf{T} \exists x \neg$  tlačiareň( $x$ )

n+3.  $\mathbf{T} \neg$  tlačiareň( $z$ ) ✓  $\delta 2\{x \mapsto z\}$

je **splniteľná** (napr. je splnená štruktúrou  $\mathcal{M} = (\{1, 2\}, i)$ ,  $i(\text{tlačiareň}) = \{1\}$  pri ohodnotení  $e = \{x \mapsto 1, z \mapsto 2, \dots\}$ ).

Chybná vetva

n+1.  $\mathbf{T}$  tlačiareň( $x$ )

n+2.  $\mathbf{T} \exists x \neg$  tlačiareň( $x$ )

n+3.  $\mathbf{T} \neg$  tlačiareň( $x$ ) ✗ „ $\delta 2\{x \mapsto x\}$ “

by bola **nesplniteľná**.

## Negatívna všeobecná kvantifikácia a jej vlastná premenná

**Negatívna všeobecne** kvantifikovaná formula

$$\mathbf{F} \forall x \text{ tlačiareň}(x),$$

znamená, že pre niektorý objekt  $x$  (**kontrapríklad**) je jej priama podformula  $\text{tlačiareň}(x)$  nepravdivá.

Tento objekt teda môžeme opäť označiť novou **vlastnou premennou** formuly  $\mathbf{F} \forall x \text{ tlačiareň}(x)$ , napríklad  $u$ , a môžeme odvodiť:

$$\mathbf{F} \text{ tlačiareň}(u).$$

⚠ Táto premenná sa **predtým na vetve nesmie vyskytovať voľná**. ⚠

Vo všeobecnosti:

$$\frac{\mathbf{F} \forall x A}{\mathbf{F} A\{x \mapsto y\}} \delta$$

pre každú formulu  $A$ , každú premennú  $x$  a každú **novú premennú**  $y$ ,  
**ak** (opäť) spĺňajú dôležitú dodatočnú podmienku.

## Dôkaz s pravidlami pre kvantifikátory

$\{\exists x \forall y(\text{opraví}(x, y) \rightarrow \text{tlačiareň}(y)),$

$\forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(x))\}$

$\models \forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \exists y \neg \text{opraví}(y, x)):$

1. **T**  $\exists x \forall y(\text{opraví}(x, y) \rightarrow \text{tlačiareň}(y))$   $S^+$
2. **T**  $\forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(x))$   $S^+$
3. **F**  $\forall x(\text{mobil}(x) \rightarrow \exists y \neg \text{opraví}(y, x))$   $S^+$
4. **F**  $(\text{mobil}(u) \rightarrow \exists y \neg \text{opraví}(y, u))$   $\delta 3\{x \mapsto u\}$
5. **T**  $\text{mobil}(u)$   $\alpha 4$
6. **F**  $\exists y \neg \text{opraví}(y, u)$   $\alpha 4$
7. **T**  $\forall y(\text{opraví}(z, y) \rightarrow \text{tlačiareň}(y))$   $\delta 1\{x \mapsto z\}$
8. **T**  $(\text{mobil}(u) \rightarrow \neg \text{tlačiareň}(u))$   $\gamma 2\{x \mapsto u\}$
9. **T**  $\neg \text{tlačiareň}(u)$   $\text{MP}8, 5$
10. **F**  $\text{tlačiareň}(u)$   $\alpha 9$
11. **T**  $(\text{opraví}(z, u) \rightarrow \text{tlačiareň}(u))$   $\gamma 7\{y \mapsto u\}$
12. **F**  $\text{opraví}(z, u)$   $\text{MT}11, 10$
13. **F**  $\neg \text{opraví}(z, u)$   $\gamma 6\{y \mapsto z\}$
14. **T**  $\text{opraví}(z, u)$   $\alpha 13$

\* 12, 14

## Tablové pravidlá pre logiku prvého rádu

### Definícia 8.16

*Pravidlami tablového kalkulu pre logiku prvého rádu* sú pravidlá typu  $\alpha$  a  $\beta$  pre výrokovú logiku a pravidlá:

$$\begin{array}{l} \gamma \quad \frac{\mathbf{T} \forall x A}{\mathbf{T} A\{x \mapsto t\}} \quad \frac{\mathbf{F} \exists x A}{\mathbf{F} A\{x \mapsto t\}} \quad \text{jednotne: } \frac{\gamma(x)}{\gamma_1(t)} \\ \delta \quad \frac{\mathbf{F} \forall x A}{\mathbf{F} A\{x \mapsto y\}} \quad \frac{\mathbf{T} \exists x A}{\mathbf{T} A\{x \mapsto y\}} \quad \text{jednotne: } \frac{\delta(x)}{\delta_1(y)} \end{array}$$

kde  $A$  je formula,  $x$  je premenná,  $t$  je term **substituovateľný** za  $x$  v  $A$  a  $y$  je premenná **substituovateľná** za  $x$  v  $A$ .

Pri operácii rozšírenia vetvy tabla  $\pi$  o dôsledok niektorého z pravidiel typu  $\delta$  navyše musí platiť, že **premenná  $y$  nemá voľný výskyt v žiadnej formule na vetve  $\pi$ .**

### Tvrdenie 8.17 (Korektnosť pravidiel $\gamma$ a $\delta$ )

Nech  $S^+$  je množina označených formúl v jazyku  $\mathcal{L}$ , nech  $x$  a  $y$  sú premenné, nech  $t$  je term.

- Ak  $\gamma(x) \in S^+$  a  $t$  je substituovateľný za  $x$  v  $\gamma_1(x)$ , tak  $S^+$  je splniteľná vtt  $S^+ \cup \{\gamma_1(t)\}$  je splniteľná.
- Ak  $\delta(x) \in S^+$ ,  $y$  je substituovateľná za  $x$  v  $\delta_1(x)$  a  $y$  sa nemá voľný výskyt v  $S^+$ , tak  $S^+$  je splniteľná vtt  $S^+ \cup \{\delta_1(y)\}$  je splniteľná.

## Tablový kalkúl pre logiku prvého rádu

---

Princíp tablových dôkazov ostáva nezmenený:

- Ak chceme dokázať, že formula  $X$  je platná, hľadáme uzavreté tablo pre  $S^+ = \{\mathbf{F} X\}$ .  
Predpokladáme teda, že v nejakej štruktúre a nejakom ohodnotení je  $X$  nesplnená a ukážeme spor.
- Podobne pre prvorádové vyplývanie  $T \vDash X$  predpokladáme, že v nejakej štruktúre a nejakom ohodnotení sú splnené všetky formuly z  $T$  ( $\mathbf{T} A$  pre  $A \in T$ ), ale  $X$  je nesplnená ( $\mathbf{F} X$ ) a ukážeme spor, teda hľadáme uzavreté tablo pre  $S^+ = \{\mathbf{T} A \mid A \in T\} \cup \{\mathbf{F} X\}$ .

## Častá chyba pri pravidlách $\gamma$ a $\delta$ : aplikácia na podformuly

Vetva:

1.  $\mathbf{F}$  mobil( $u$ )
2.  $\mathbf{T}$  tlačiareň( $u$ )
3.  $\mathbf{T}$  ( $\forall x$  tlačiareň( $x$ )  $\rightarrow$   $\forall y$  mobil( $y$ ))

je **splnitelná**

(je splnená napr. štruktúrou  $\mathcal{M} = (\{1, 2\}, i)$ , kde  $i(\text{mobil}) = \{1\}$ ,  $i(\text{tlačiareň}) = \{2\}$  pri ohodnotení  $e = \{u \mapsto 2, \dots\}$ ).

V table:

1. $\mathbf{F}$ mobil( $u$ )	
2. $\mathbf{T}$ tlačiareň( $u$ )	
3. $\mathbf{T}$ ( $\forall x$ tlačiareň( $x$ ) $\rightarrow$ $\forall y$ mobil( $y$ ))	
<hr/>	
4. $\mathbf{F}$ $\forall x$ tlačiareň( $x$ ) ✓ $\beta 3$	5. $\mathbf{T}$ $\forall y$ mobil( $y$ ) ✓ $\beta 3$
6. $\mathbf{F}$ tlačiareň( $v$ ) ✓ $\delta 4$	7. $\mathbf{T}$ mobil( $u$ ) ✓ $\gamma 3$
	* 7, 1

je ľavá vetva **splnitelná**

(je splnená napr. tou istou štruktúrou  $\mathcal{M}$  ako pôvodná vetva pri ohodnotení  $e = \{u \mapsto 2, v \mapsto 1 \dots\}$ ).

Chybná vetva:

1.  $\mathbf{F}$  mobil( $u$ )
2.  $\mathbf{T}$  tlačiareň( $u$ )
3.  $\mathbf{T}$  ( $\forall x$  tlačiareň( $x$ )  $\rightarrow$   $\forall y$  mobil( $y$ ))
4.  $\mathbf{T}$  (tlačiareň( $u$ )  $\rightarrow$   $\forall y$  mobil( $y$ )) ✗ „ $\gamma 3$ “
5.  $\mathbf{T}$   $\forall y$  mobil( $y$ ) MP4, 2
6.  $\mathbf{T}$  mobil( $u$ )  $\gamma 5$

je **nesplnitelná**.

Tablové pravidlá sa **nikdy neaplikujú na podformuly** označenej formuly v uzle.

# Tablá s kvantifikátormi

---

Substitúcia a substituovateľnosť



## Definícia 8.18 (Substitúcia)

**Substitúciou** (v jazyku  $\mathcal{L}$ ) nazývame každé zobrazenie  $\sigma : V \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$  z nejakej množiny individuových premenných  $V \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$  do termov jazyka  $\mathcal{L}$ .

## Príklad 8.19

Keď  $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, \dots, z, u_1, \dots\}$ ,  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Klárka, Jurko}\}$ ,  
napríklad  $\sigma_1 = \{x \mapsto \text{Klárka}, y \mapsto u, z \mapsto x\}$  je substitúcia.

# Problém so substitúciou

## Vetva

n+1.  $\mathbf{T} \forall x \neg \text{pozná}(x, x)$

n+2.  $\mathbf{T} \neg \text{pozná}(y, y) \quad \gamma_1 \{x \mapsto y\}$

n+3.  $\mathbf{T} \forall x \exists y \text{pozná}(x, y)$

je **splniteľná** (napr. je splnená štruktúrou  $\mathcal{M} = (\{1, 2\}, i, i(\text{pozná}) = \{(1, 2), (2, 1)\}$

pri ohodnotení  $e = \{y \mapsto 1, \dots\}$ ).

## Ale vetva

n+1.  $\mathbf{T} \forall x \neg \text{pozná}(x, x)$

n+2.  $\mathbf{T} \neg \text{pozná}(y, y) \quad \gamma_1 \{x \mapsto y\}$

n+3.  $\mathbf{T} \forall x \exists y \text{pozná}(x, y)$

n+4.  $\mathbf{T} \exists y \text{pozná}(y, y) \quad \times \text{ „}\gamma^3 \{x \mapsto y\}$

je **nesplniteľná**.

## Oprava: Vetva

n+1.  $\mathbf{T} \forall x \neg \text{pozná}(x, x)$

n+2.  $\mathbf{T} \neg \text{pozná}(z, z) \quad \gamma_1 \{x \mapsto z\}$

n+3.  $\mathbf{T} \forall x \exists y \text{pozná}(x, y)$

n+4.  $\mathbf{T} \exists y \text{pozná}(z, y) \quad \checkmark \gamma_3 \{x \mapsto z\}$

je **splniteľná**.

### Definícia 8.20 (Substituovateľnosť, aplikovateľnosť substitúcie)

Nech  $A$  postupnosť symbolov (term alebo formula),  
nech  $t, t_1, \dots, t_n$  sú termy a  $x, x_1, \dots, x_n$  sú premenné.

Term  $t$  je **substituovateľný** za premennú  $x$  v  $A$  vtt

**nie je pravda**, že

pre niektorú premennú  $y$  vyskytujúcu sa v  $t$  platí,

že v nejakej oblasti platnosti kvantifikátora  $\exists y$  alebo  $\forall y$  vo  
formule  $A$  sa premenná  $x$  vyskytuje voľná.

Substitúcia  $\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$  je **aplikovateľná** na  $A$  vtt

term  $t_i$  je substituovateľný za  $x_i$  v  $A$  pre každé  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

### Príklad 8.21

Nech  $A = \exists \underline{y}$  pozná( $\underline{x}, y$ ).

- Substitúcia  $\{\underline{x} \mapsto \underline{y}, z \mapsto \text{Jurko}\}$  **nie je aplikovateľná** na  $A$ ,  
lebo term  $y$  **nie je substituovateľný** za premennú  $x$  v  $A$ .
- Substitúcia  $\{\underline{x} \mapsto z, \underline{y} \mapsto \text{Jurko}, z \mapsto \underline{y}\}$  **je aplikovateľná** na  $A$ .

## Substitúcia do postupnosti symbolov

### Definícia 8.22 (Substitúcia do postupnosti symbolov)

Nech  $A$  je postupnosť symbolov,

nech  $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$  je substitúcia.

Ak  $\sigma$  je aplikovateľná na  $A$ , tak  $A\sigma$  je postupnosť symbolov, ktorá vznikne **súčasným** nahradením každého **voľného** výskytu premennej  $x_i$  v  $A$  termom  $t_i$ .

### Príklad 8.23

Nech  $A = \exists \underline{y}$  pozná( $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ) a  $\sigma = \{\underline{x} \mapsto z, \underline{y} \mapsto u, z \mapsto \underline{y}\}$ .

Substitúcia  $\sigma$  je aplikovateľná na  $A$ . V  $A$  je voľná iba premenná  $x$ , dosadíme za ňu term  $z$ , ktorý neobsahuje viazanú premennú  $y$ .

Všetky výskyty  $y$  sú viazané, za ne sa nedosádza.

Premenná  $z$  sa v  $A$  nevyskytuje, nie je za čo dosadzovať.

$A\sigma = \exists \underline{y}$  pozná( $z$ ,  $\underline{y}$ )

## Substitúcia do termov a formúl rekurzívne

### Tvrdenie 8.24

Pre každú substitúciu  $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ ,  
každú premennú  $y \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , každý symbol  
konštanty  $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ , každý predikátový symbol  $P^k \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ ,  
každé  $i \in \{1, \dots, n\}$ , každú spojku  $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ , všetky formuly  $A$  a  $B$   
a všetky termy  $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$  platí:

$$x_i \sigma = t_i \qquad y \sigma = y \qquad a \sigma = a$$

$$(s_1 \doteq s_2) \sigma = (s_1 \sigma \doteq s_2 \sigma) \quad (P(s_1, \dots, s_k)) \sigma = P(s_1 \sigma, \dots, s_k \sigma)$$

$$(\neg A) \sigma = \neg(A \sigma) \qquad ((A \diamond B)) \sigma = (A \sigma \diamond B \sigma)$$

$$(\forall y A) \sigma = \forall y (A \sigma) \qquad (\exists y A) \sigma = \exists y (A \sigma)$$

$$(\forall x_i A) \sigma = \forall x_i (A \sigma_i) \qquad (\exists x_i A) \sigma = \exists x_i (A \sigma_i),$$

kde  $\sigma_i = \sigma \setminus \{x_i \mapsto t_i\}$ , za predpokladu, že  $\sigma$  je v danom prípade aplikovateľná.

## Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

---

## Viacnásobné použitie rovnakého kvantifikátora

---

Použitím jedného kvantifikátora vo formule sme minulý týždeň dokázali vyjadriť pomerne komplikované tvrdenia.

Ale už v príklade tabiel sme videli, že niektoré tvrdenia zodpovedajú viacerým kvantifikátorom vo formule.

Rozoberme si niekoľko typických prípadov.

# Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

---

Rovnaký kvantifikátor



## Viacnásobné použitie rovnakého kvantifikátora

---

Najjednoduchšie sú opakované použitia rovnakého kvantifikátora na začiatku formuly:

- $\exists x \exists y ((\text{človek}(x) \wedge \text{škrekok}(y)) \wedge \text{křmi}(x, y))$
- $\forall x \forall y ((\text{človek}(x) \wedge \text{škrekok}(y)) \rightarrow \text{křmi}(x, y))$

Význam je ľahké uhádnuť, aj keď je možno zrejmejší v alternatívnej forme, ktorá priamo zodpovedá aristotelovským formám obmedzenej kvantifikácie:


- $\exists x (\text{človek}(x) \wedge \exists y (\text{škrekok}(y) \wedge \text{křmi}(x, y)))$   
Nejaký človek (má vlastnosť, že) křmi nejakého škrečka.
- $\forall x (\text{človek}(x) \rightarrow \forall y (\text{škrekok}(y) \rightarrow \text{křmi}(x, y)))$   
Každý človek křmi každého škrečka.

## Prenexové vs. hlbšie vnorené formy

---

Dve uvedené formy každého typu tvrdenia sú vzájomne ekvivalentné, majú rovnaký význam.

Prvé formy sú **prenexové** — kvantifikátory sú na začiatku formuly.

 Nie je vždy dobré snažiť sa o prenexovú formu, v zložitejších prípadoch môže byť zavádzajúca.

## Rôznosť objektov označených premennými — všeobecný prípad

---

Tento typ tvrdení je väčšinou bezproblémový až na jeden prípad:

$$\forall x \forall y ((\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y)) \rightarrow \\ (\text{väčší}(x, y) \vee \text{menší}(x, y)))$$

**nezodpovedá** tvrdeniu: *Pre každé zvieratká  $x$  a  $y$  platí, že  $x$  je väčšie od  $y$  alebo  $x$  je menšie od  $y$ .*

Slovenské každé (dve) **zvieratká**  $x$  a  $y$  znamená, že  $x$  a  $y$  označujú naozaj viacero zvieratiek. Ale v logike prvého rádu je každá premenná kvantifikovaná samostatne a **rôzne premenné môžu označovať ten istý objekt**.

## Rôznosť objektov označených premennými — všeobecný prípad

Tento typ tvrdení je väčšinou bezproblémový až na jeden prípad:

$$\forall x \forall y ((\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y)) \rightarrow \\ (\text{väčší}(x, y) \vee \text{menší}(x, y)))$$

**nezodpovedá** tvrdeniu: *Pre každé zvieratká  $x$  a  $y$  platí, že  $x$  je väčšie od  $y$  alebo  $x$  je menšie od  $y$ .*

Slovenské každé (dve) **zvieratká**  $x$  a  $y$  znamená, že  $x$  a  $y$  označujú naozaj viacero zvieratiek. Ale v logike prvého rádu je každá premenná kvantifikovaná samostatne a **rôzne premenné môžu označovať ten istý objekt**. Rôznosť musíme zapísať explicitne:

$$\forall x \forall y ((\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \\ (\text{väčší}(x, y) \vee \text{menší}(x, y)))$$

Pre ľubovoľné termy  $s, t$  je  $s \neq t$  je skratka za  $\neg s \doteq t$ .

## Rôznosť objektov označených premennými — existenčný prípad

---

Podobne formula

$$\exists x \exists y (\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y))$$

**neznamená**, že existujú **aspoň dve** zvieratká  
(je ekvivalentná s  $\exists x \text{zvieratko}(x)$ ).

Existenciu aspoň dvoch zvieratiek zabezpečí formula:

## Rôznosť objektov označených premennými — existenčný prípad

---

Podobne formula

$$\exists x \exists y (\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y))$$

**neznamená**, že existujú **aspoň dve** zvieratká  
(je ekvivalentná s  $\exists x \text{zvieratko}(x)$ ).

Existenciu aspoň dvoch zvieratiek zabezpečí formula:

$$\exists x \exists y (\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y) \wedge x \neq y)$$

Podľa dohody zo 4. prednášky do seba vnorené vľavo uzátvorkované konjunkcie skrátene zapisujeme bez vnútorných zátvoriek.

Teda  $(\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y) \wedge x \neq y)$

je skrátenejší zápis  $((\text{zvieratko}(x) \wedge \text{zvieratko}(y)) \wedge x \neq y)$ .

Podobne skracujeme do seba vnorené disjunktívne.

# Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

---


Alternácia kvantifikátorov

Časté formuly, v ktorých sa vyskytujú oba kvantifikátory, sú ako

$$\forall x(\text{zvieratko}(x) \rightarrow \exists y(\text{človek}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x)))$$

Hovorí, že *každé zvieratko má vlastnosť, že nejaký človek ho kŕmi*, teda *každé zvieratko niekto kŕmi*.

Ekvivalentne sa to dá vyjadriť aj (v menej vernej) prenexovej forme:

  $\forall x \exists y(\text{zvieratko}(x) \rightarrow (\text{človek}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x)))$



Pri rovnakých kvantifikátoroch v prenexovej forme na ich poradí nezáleží:

- $\forall x \forall y \text{ má\_réd}(x, y)$  je ekvivalentné  $\forall y \forall x \text{ má\_réd}(x, y)$ ;
- $\exists x \exists y \text{ má\_réd}(x, y)$  je ekvivalentné  $\exists y \exists x \text{ má\_réd}(x, y)$ .

Pri rôznych kvantifikátoroch zmena poradia vážne mení význam:

- $\forall x \exists y \text{ má\_réd}(x, y)$  —

Pri rovnakých kvantifikátoroch v prenexovej forme na ich poradí nezáleží:

- $\forall x \forall y \text{ má\_r } \text{ád}(x, y)$  je ekvivalentné  $\forall y \forall x \text{ má\_r } \text{ád}(x, y)$ ;
- $\exists x \exists y \text{ má\_r } \text{ád}(x, y)$  je ekvivalentné  $\exists y \exists x \text{ má\_r } \text{ád}(x, y)$ .

Pri rôznych kvantifikátoroch zmena poradia vážne mení význam:

- $\forall x \exists y \text{ má\_r } \text{ád}(x, y)$  — *Každý/-á má rád/rada niekoho.*

Pri rovnakých kvantifikátoroch v prenexovej forme na ich poradí nezáleží:

- $\forall x \forall y \text{ má\_r\acute{a}d}(x, y)$  je ekvivalentné  $\forall y \forall x \text{ má\_r\acute{a}d}(x, y)$ ;
- $\exists x \exists y \text{ má\_r\acute{a}d}(x, y)$  je ekvivalentné  $\exists y \exists x \text{ má\_r\acute{a}d}(x, y)$ .

Pri rôznych kvantifikátoroch zmena poradia vážne mení význam:

- $\forall x \exists y \text{ má\_r\acute{a}d}(x, y)$  – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\exists x \forall y \text{ má\_r\acute{a}d}(x, y)$  –

Pri rovnakých kvantifikátoroch v prenexovej forme na ich poradí nezáleží:

- $\forall x \forall y \text{ má\_rād}(x, y)$  je ekvivalentné  $\forall y \forall x \text{ má\_rād}(x, y)$ ;
- $\exists x \exists y \text{ má\_rād}(x, y)$  je ekvivalentné  $\exists y \exists x \text{ má\_rād}(x, y)$ .

Pri rôznych kvantifikátoroch zmena poradia vážne mení význam:

- $\forall x \exists y \text{ má\_rād}(x, y)$  – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\exists x \forall y \text{ má\_rād}(x, y)$  – Nieкто má rád/rada všetkých.

## Poradie kvantifikovaných premenných

---

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má\_rād}(x, y)$  – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má\_rād}(y, x)$  –

## Poradie kvantifikovaných premenných

---

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má\_rād}(x, y)$  – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má\_rād}(y, x)$  – Každú/-ého má niekto rád.

## Poradie kvantifikovaných premenných

---

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má\_rād}(x, y)$  – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má\_rād}(y, x)$  – Každú/-ého má niekto rád.

## Poradie kvantifikovaných premenných

---

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má\_réd}(x, y)$  – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má\_réd}(y, x)$  – Každú/-ého má niekto rád.

a

- $\exists x \forall y \text{ má\_réd}(x, y)$  – Nieko má rada/rád všetkých.
- $\exists x \forall y \text{ má\_réd}(y, x)$  –



## Poradie kvantifikovaných premenných

---

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má\_rād}(x, y)$  – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má\_rād}(y, x)$  – Každú/-ého má niekto rád.

a

- $\exists x \forall y \text{ má\_rād}(x, y)$  – Niekoľko má rada/rád všetkých.
- $\exists x \forall y \text{ má\_rād}(y, x)$  – Niekoho majú radi všetci.

## Poradie kvantifikovaných premenných

Záleží aj na tom, ako sa kvantifikované premenné použijú vo formule, ktorá je kvantifikovaná.

Porovnajme:

- $\forall x \exists y \text{ má\_räd}(x, y)$  – Každý/-á má rád/rada niekoho.
- $\forall x \exists y \text{ má\_räd}(y, x)$  – Každú/-ého má niekto rád.

a

- $\exists x \forall y \text{ má\_räd}(x, y)$  – Niektó má rada/rád všetkých.
- $\exists x \forall y \text{ má\_räd}(y, x)$  – Niekoho majú radi všetci.

Cvičenie: Pre každú z týchto štyroch formúl nájdite štruktúru, v ktorej je pravdivá, ale ostatné sú nepravdivé.

## Unikátna existencia

---

Kombináciou oboch kvantifikátorov s rovnosťou môžeme vyjadriť existenciu **práve jedného** (unikátneho) objektu s danou vlastnosťou:

$$\exists x(\text{škrekok}(x) \wedge \forall y(\text{škrekok}(y) \rightarrow x \doteq y))$$

Neformálne: *Nejaký škrekok je jediným škrečkom.*

Podobne sa dá vyjadriť existencia práve  $k$  objektov pre každé prirodzené číslo  $k$ .

# Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

---

Postupná formalizácia a parafrázovanie

## Postupná formalizácia

---

Na formalizáciu zložitých tvrdení je najlepšie ísť postupne.

Sformalizujme: *Každého škrečka kŕmi nejaké dieťa.*

1. Rozpoznáme, že tvrdenie má tvar *Všetky  $P$  sú  $Q$* , pričom  $P$  je atomická vlastnosť. Môžeme ho teda čiastočne sformalizovať na:

## Postupná formalizácia

---

Na formalizáciu zložitých tvrdení je najlepšie ísť postupne.

Sformalizujme: *Každého škrečka kŕmi nejaké dieťa.*

1. Rozpoznáme, že tvrdenie má tvar *Všetky P sú Q*, pričom *P* je atomická vlastnosť. Môžeme ho teda čiastočne sformalizovať na:

$$\forall x(\text{škrekok}(x) \rightarrow \text{nejaké dieťa kŕmi } x)$$

2. Sformalizujeme *nejaké dieťa kŕmi x*: Má formu: *Nejaké P je Q*:

## Postupná formalizácia

---

Na formalizáciu zložitých tvrdení je najlepšie ísť postupne.

Sformalizujme: *Každého škrečka kŕmi nejaké dieťa.*

1. Rozpoznáme, že tvrdenie má tvar *Všetky P sú Q*, pričom *P* je atomická vlastnosť. Môžeme ho teda čiastočne sformalizovať na:

$$\forall x(\text{škrekok}(x) \rightarrow \text{nejaké dieťa kŕmi } x)$$

2. Sformalizujeme *nejaké dieťa kŕmi x*: Má formu: *Nejaké P je Q*:

$$\exists y(\text{dieťa}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x))$$

3. Dosadíme:

## Postupná formalizácia

---

Na formalizáciu zložitých tvrdení je najlepšie ísť postupne.

Sformalizujme: *Každého škrečka kŕmi nejaké dieťa.*

1. Rozpoznáme, že tvrdenie má tvar *Všetky P sú Q*, pričom *P* je atomická vlastnosť. Môžeme ho teda čiastočne sformalizovať na:

$$\forall x(\text{škrekok}(x) \rightarrow \text{nejaké dieťa kŕmi } x)$$

2. Sformalizujeme *nejaké dieťa kŕmi x*: Má formu: *Nejaké P je Q*:

$$\exists y(\text{dieťa}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x))$$

3. Dosadíme:

$$\forall x(\text{škrekok}(x) \rightarrow \exists y(\text{dieťa}(y) \wedge \text{kŕmi}(y, x)))$$

Systematickým prístupom sa dajú správne sformalizovať aj veľmi zložité tvrdenia.



## Viacnásobná negácia – nesprávne možnosti

---

- ⚠ Opatrnosť je potrebná pri formalizácii tvrdení s viacnásobnou negáciou, napríklad: „*Nijaké dieťa nechová žiadnu vretenicu.*“

## Viacnásobná negácia – nesprávne možnosti

⚠ Opatrnosť je potrebná pri formalizácii tvrdení s viacnásobnou negáciou, napríklad: „*Nijaké dieťa nechová žiadnu vretenicu.*“

Tu sa ľahko stane, že pri **neopatrnej** postupnej formalizácii skončíme s chybnou formulou:

✘  $\neg \exists x(\text{dieťa}(x) \wedge \neg \exists y(\text{vretenicu}(y) \wedge \text{chová}(x, y)))$  –

*Nie je pravda, že nejaké dieťa nemá vlastnosť,*

*že chová nejakú vretenicu, teda*

*Každé dieťa má vlastnosť, že chová nejakú vretenicu, teda*

*Každé dieťa chová nejakú vretenicu.*

✘  $\neg \exists x(\text{dieťa}(x) \wedge \neg \exists y(\text{vretenicu}(y) \wedge \neg \text{chová}(x, y)))$  –

*Nie je pravda, že nejaké dieťa nemá vlastnosť,*

*že nechová nejakú vretenicu, teda*

*Každé dieťa nechová nejakú vretenicu (ale môže chovať iné).*

## Viacnásobná negácia — parafráza a správna formalizácia

---

Na správne sformalizovanie „*Žiadne dieťa nechová žiadnu vretenicu*“  
je lepšie toto tvrdenie **parafrázovať**:

Na správne sformalizovanie „Žiadne dieťa nechová žiadnu vretenicu“ je lepšie toto tvrdenie **parafrázovať**:

- Nie je pravda, že nejaké dieťa je také, že chová nejakú vretenicu.
- ✓  $\neg \exists x(\text{dieťa}(x) \wedge \exists y(\text{vretenicu}(y) \wedge \text{chová}(x, y)))$
- Pre každé dieťa nie je pravda, že chová nejakú vretenicu.
- ✓  $\forall x(\text{dieťa}(x) \rightarrow \neg \exists y(\text{vretenicu}(y) \wedge \text{chová}(x, y)))$
- Pre každé dieťa  $x$  je pravda, že pre každú vretenicu  $y$  je pravda, že  $x$  nechová  $y$ .
- ✓  $\forall x(\text{dieťa}(x) \rightarrow \forall y(\text{vretenicu}(y) \rightarrow \neg \text{chová}(x, y)))$

## Viacnásobná negácia — nesprávna parafráza

! Podľa našich skúseností študenti/-ky najčastejšie výroky

„Žiadne dieťa nechová žiadnu vretenicu,“

nesprávne parafrázujú ako

✗ „*Neexistuje dieťa  $x$  a neexistuje vretenica  $y$ ,*

*pre ktoré je pravda, že  $x$  chová  $y$ ,*“

čo navyše následne sformalizujú v prenexovom tvare ako

$$\text{✗ } \neg \exists x \neg \exists y (\text{dieťa}(x) \wedge \text{vretenica}(y) \wedge \text{chová}(x, y))$$

„Každý objekt v doméne je dieťa, ktoré chová nejakú vretenicu.“

Pri parafrázovaní preto:

✗ nepoužívajte „neexistuje ...“,

✓ namiesto toho používajte: „nie je pravda, že existuje ...“;

✗ nespájajte kvantifikátory spojками „a“, „alebo“,

✓ za kvantifikátorom začnite **vedľajšiu vetu**:

„Existuje  $x$  *také, že*  $x$  je dieťa a existuje  $y$  *také, že* ...“

Niekedy sa oplatí pozrieť na tvrdenie cez jeho negáciu.

Užitočné napríklad pri formalizácii do databázových jazykov — dopyty v datalogu či SQL (bez agregácie) možno vyjadriť formulami prvorádovej logiky, ale **nemožno použiť všeobecný kvantifikátor**.

Skúste schematicky zakresliť situáciu k výrokovej forme „**človek, ktorý pozná všetkých známych svojich známych**“.

Niekedy sa oplatí pozrieť na tvrdenie cez jeho negáciu.

Užitočné napríklad pri formalizácii do databázových jazykov — dopyty v datalogu či SQL (bez agregácie) možno vyjadriť formulami prvorádovej logiky, ale **nemožno použiť všeobecný kvantifikátor**.

Skúste schematicky zakresliť situáciu k výrokovej forme „**človek, ktorý pozná všetkých známych svojich známych**“.

$$\text{človek}(x) \wedge \forall y(\text{pozná}(x, y) \rightarrow \forall z(\text{pozná}(y, z) \rightarrow \text{pozná}(x, z)))$$

Opak: človek, čo nepozná niektorého známeho svojho známeho.

Niekedy sa oplatí pozrieť na tvrdenie cez jeho negáciu.

Užitočné napríklad pri formalizácii do databázových jazykov — dopyty v datalogu či SQL (bez agregácie) možno vyjadriť formulami prvorádovej logiky, ale **nemožno použiť všeobecný kvantifikátor**.

Skúste schematicky zakresliť situáciu k výrokovej forme „**človek, ktorý pozná všetkých známych svojich známych**“.

$$\text{človek}(x) \wedge \forall y(\text{pozná}(x, y) \rightarrow \forall z(\text{pozná}(y, z) \rightarrow \text{pozná}(x, z)))$$

Opak: človek, čo nepozná niektorého známeho svojho známeho.

$$\text{človek}(x) \wedge \neg \exists y \exists z(\text{pozná}(x, y) \wedge \text{pozná}(y, z) \wedge \neg \text{pozná}(x, z))$$



## Odkaz z konzekventu — o sedliakoch a osloch

Už minule sme rozoberali zdanlivo existenčné tvrdenia typu:

*Ak nejaký prvák navštevuje LPI, tak (on) je bystrý.*

Postupnou formalizáciou by sme mohli dospieť k nesprávnej otvorenej formule:

✘  $(\exists x(\text{prvák}(x) \wedge \text{navštevuje}(x, \text{LPI})) \rightarrow \text{bystrý}(x))$ .

✔  $\forall x((\text{prvák}(x) \wedge \text{navštevuje}(x, \text{LPI})) \rightarrow \text{bystrý}(x))$ .

Vyskytujú sa aj v zložitejších kombináciách. Úderným príkladom je:

*Každý sedliak, ktorý vlastní nejakého osla, ho bije.*

Na existenčné tvrdenie *vlastní nejakého osla* v antecedente odkazuje zámeno *ho* v konzekvente.

## Odkaz z konzekventu — nesprávne možnosti

Postupnou formalizáciou by sme mohli dostať nesprávnu formulu:

$$\text{✗ } \forall x((\text{sedliak}(x) \wedge \exists y(\text{osol}(y) \wedge \text{vlastní}(x, y))) \rightarrow \text{bije}(x, y))$$

Keby sme sa ju pokúsili „zachrániť“ tým, že zaviažeme premennú  $y$ , mohlo by to dopadnúť rôzne, ale stále neprávne:

$$\text{✗ } \forall x(\text{sedliak}(x) \wedge \exists y(\text{osol}(y) \wedge \text{vlastní}(x, y) \wedge \text{bije}(x, y)))$$

— *Všetko je sedliak, ktorý vlastní osla, ktorého bije.*

$$\text{✗ } \forall x(\text{sedliak}(x) \rightarrow \exists y(\text{osol}(y) \wedge \text{vlastní}(x, y) \wedge \text{bije}(x, y)))$$

— *Každý sedliak určite vlastní osla, ktorého bije.*

Existenčný kvantifikátor teda nefunguje.

Na správne sformalizovanie je tvrdenie

*Každý sedliak, ktorý vlastní nejakého osla, ho bije,*

potrebné **parafrázovať** na

- *Každý sedliak bije každého osla, ktorého vlastní.*
- *Pre každého osla je pravda, že každý sedliak, ktorý ho vlastní, ho bije.*

Z parafráz už ľahko dostaneme správne formalizácie:

✓  $\forall x(\text{sedliak}(x) \rightarrow \forall y((\text{osol}(y) \wedge \text{vlastní}(x, y)) \rightarrow \text{bije}(x, y)))$

✓  $\forall x(\text{osol}(x) \rightarrow \forall y((\text{sedliak}(y) \wedge \text{vlastní}(y, x)) \rightarrow \text{bije}(y, x)))$

# Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

---

Závislosť od kontextu

## Nejednoznačné tvrdenia

*Každú minútu v New Yorku prepadne jedného človeka.*

*Dnes nám poskytnete rozhovor.*

— SNL

Vtip spočíva v potenciálnej nejednoznačnosti prvej vety.

Pravdepodobne ste ju pochopili („slabé“ čítanie)

$$\forall x(\text{minúta}(x) \rightarrow \exists y(\text{človek}(y) \wedge \text{prepadnutýPočas}(x, y)))$$

Ale druhá veta vyzdvihla menej pravdepodobný alternatívny význam

(„silné“ čítanie):

$$\exists y(\text{človek}(y) \wedge \forall x(\text{minúta}(x) \rightarrow \text{prepadnutýPočas}(x, y)))$$

Závisí od situácie, ktoré z čítaní je správne.

Formalizácia je teda **kontextovo závislá**.

# Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

---

Dodatky k formalizácii s jedným  
kvantifikátorom

Niekedy potrebujeme vymenovať objekty s nejakou vlastnosťou:

- *Na bunke č. 14 bývajú Ad'a, Biba, Ciri, Dada.*

$(\text{býva\_v}(\text{Ad'a}, \text{bunka14}) \wedge \dots \wedge \text{býva\_v}(\text{Dada}, \text{bunka14}))$

Ekvivalentne:

*Každá z Ad'a, Biba, Ciri, Dada býva v bunke č. 14.*

$\forall x((x \doteq \text{Ad'a} \vee \dots \vee x \doteq \text{Dada}) \rightarrow \text{býva\_v}(x, \text{bunka14}))$

- *Na bunke č. 14 bývajú iba Ad'a, Biba, Ciri, Dada.*

*Každý, kto býva v bunke č. 14, je jedna z Ad'a, Biba, Ciri, Dada.*

$\forall x(\text{býva\_v}(x, \text{bunka14}) \rightarrow (x \doteq \text{Ad'a} \vee \dots \vee x \doteq \text{Dada}))$

## Výnimky a implikatúra

Tvrdenia s výnimkami niekedy vyznievajú silnejšie, ako naozaj sú.

*Mám rád všetko ovocie, okrem jablák.*

Toto tvrdenie zodpovedá aristotelovskej forme: Každé  $P$  je  $Q$ , kde  $P =$  ovocie a nie jablko a  $Q =$  také, že ho mám rád, teda:

$$\forall x((\text{ovocie}(x) \wedge \neg \text{jablko}(x)) \rightarrow \text{mám\_rád}(x))$$

Je **veľmi** lákavé z tohto tvrdenia usúdiť, že navyše znamená: *Jablká nemám rád*, ale je to iba implikatúra (zdanlivý dôsledok).

K *Mám rád všetko ovocie, okrem jablák* môžeme síce prekvapivo, ale **bez sporu** dodať:

- *Jablká milujem.*
- *Z jablák mám rád iba červené.*

V spore s tvrdením by bol dodatok: *Ale slivky nemám rád.*